Г. Н. ДУБОШИН

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ

Г. Н. ДУБОШИН

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов университетов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

531
Д 79
УДК 521.1 (075.8)

Д $\frac{20603-063}{053(02)-78}$ 182-78

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть третья

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ЗАДАЧИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — третья в задуманной мною серии учебных пособий по основным вопросам небесной механики — является продолжением двух предыдущих *).

Как показывает подзаголовок, книга посвящена изложению основ аналитических и качественных методов науки о движении небесных тел, а поэтому прежде всего следует установить, что под этим подразумевается.

В предыдущей книге было показано, что задачи небесной механики приводятся к рассмотрению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, однако, в конечном виде большей частью не интегрируются. Вследствие этого приходится прибегать к различным приближенным способам интегрирования, к которым относятся и различные приемы численного интегрирования, и методы последовательных приближений, и применение бесконечных рядов того или иного вида.

Под аналитическими методами мы будем разуметь способы и приемы, дающие возможность найти общее или частное решение предложенной системы дифференциальных уравнений в виде бесконечных сходящихся рядов, позволяющих находить числовые значения интересующих нас величин с любой степенью точности.

Однако из рассмотрения бесконечных рядов вообще затруднительно или даже невозможно вывести общие свойства движения, что заставило в конце прошлого столетия А. М. Ляпунова и почти одновременно А. Пуанкаре изобрести и разработать новые методы, которые Пуанкаре назвал качественными.

Теперь под качественными методами дифференциальных уравнений понимают все способы и приемы, позволяющие установить свойства функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, не зная общего решения этих уравнений и не используя бесконечные ряды. В применении к небесной

---

*) См. Г. Н. Дубошин, Теория притяжения, Физматгиз, 1961 и Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Основные задачи и методы, изд. 3-е, «Наука», 1975.

механике качественные методы теории дифференциальных уравнений позволяют определить общие свойства движений небесных тел, а аналитические методы дают возможность получить формулы, позволяющие определять положения и скорости движущихся тел для любого момента времени.

Обычно при решении конкретных задач о движении небесных тел (естественных и искусственных) приходится сочетать оба направления — аналитическое и качественное, — проверяя справедливость аналитических формул качественным путем или получая качественные результаты при помощи аналитических приемов.

В результате такого сочетания можно построить строгую математическую теорию движения, практическую удовлетворительность которой можно установить сравнением с наблюдениями, с одной стороны, и сравнением с результатами численного интегрирования — с другой.

Настоящая книга не претендует на полное изложение всех вопросов качественной и аналитической небесной механики, но имеет своей целью дать некоторое, первоначальное, представление об этой области науки.

Книга разделена на три части. Первая часть «Общие методы» содержит изложение основных результатов теории устойчивости движения, созданной А. М. Ляпуновым, и теории периодических решений, разработанной А. М. Ляпуновым и А. Пуанкаре.

Вторая часть «Ограниченные задачи» заключает в себе изложение некоторых основных результатов, касающихся ограниченной задачи трех тел, причем главное внимание обращено здесь на вопросы устойчивости частных решений рассматриваемых задач и связанные с последними вопросы существования и нахождения периодических решений.

Третья часть «Неограниченные задачи» посвящена в основном изложению важнейших результатов в проблеме трех тел.

Здесь рассматриваются частные решения общей задачи трех тел, приводятся теоремы Брунса и Пуанкаре о несуществовании алгебраических и однозначных трансцендентных интегралов задачи трех тел, кроме десяти классических, и излагаются исследования Зундмана, дающая общее математическое решение задачи трех тел.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание учебного пособия «Небесная механика. Аналитические и качественные методы» представляет собой некоторую переработку 1-го издания 1964 г. Общая структура книги осталась почти без изменения. Книга разделена на три части так же, как и в 1-м издании, но в третью часть добавлена новая глава.

Теперь опишем все части с большей подробностью. Первая часть «Общие методы» не изменилась по содержанию, только исправлены некоторые недостатки и кое-где введены некоторые дополнения. А именно, в главу II прибавлены поясняющие примеры и введен дополнительный раздел, дающий понятие об устойчивости при постоянно действующих возмущениях и приведено доказательство теоремы Ляпунова о производном определителе, которая в 1-м издании дана без доказательства. Наконец, подробно рассмотрен важный пример Ляпунова составления характеристического уравнения для уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами.

В части второй «Ограниченные задачи» главы VI и VII оставлены без изменения. Но первые две главы этой части написаны заново. Это объясняется тем, что часть материала этих глав была внесена во 2-е издание нашего курса «Небесная механика. Основные задачи и методы» 1968 г. и перешла также в 3-е издание этой книги 1975 г. Поэтому нет необходимости опять повторять то, что уже было дважды напечатано. Кроме того, задача двух неподвижных центров входит в монографию проф. Е. П. Аксенова.

В настоящем издании глава IV называется «Задача неподвижных центров», где задача двух неподвижных центров отмечена как частный случай. В этой главе рассмотрена также классическая задача теоретической механики — задача о движении материальной точки, находящейся под действием одного неподвижного центра, куда относятся также задача Мещерского и одна задача, рассмотренная когда-то автором.

В главе V «Ограниченная задача трех тел» сохранено только название, а весь текст написан заново. Здесь рассматривается обобщенная задача трех тел. Выводятся общие условия существования частных решений — треугольных и прямолинейных. Подробно рассматривается задача об устойчивости точек либрации в разных неклассических случаях, из которых классические результаты получаются как частные случаи. Уточнена и пересмотрена задача о периодических решениях точек либрации в классической постановке.

В части третьей «Неограниченные задачи» осталось две главы, причем глава VIII называется теперь «Общая задача многих тел», в которой рассматриваются обобщенные задачи многих и трех материальных точек и выводятся условия существования частных решений общей задачи трех тел-точек.

Первые три параграфа этой главы излагают результаты, полученные автором. Последние два параграфа перенесены из 1-го издания почти без изменений.

Глава IX «Задача о движении неизменяемых твердых тел» написана заново по результатам работ автора, которые в предыдущем издании не затронуты, а в изданиях первой нашей книги затронуты только частично для частного случая, когда движение тел управляется законом Ньютона.

В настоящее время задача о движении твердых тел служит предметом исследований многих авторов как в нашей стране, так и за рубежом, но только для случая закона Ньютона. В данной книге, излагающей результаты автора, рассматриваются случаи общих законов сил, а случай закона Ньютона упоминается как частный.

В этой главе рассмотрены общие уравнения движения многих тел, а более подробно — трех тел. Для последней задачи выведены условия существования частных решений, аналогичных классическим, и приведены некоторые результаты, касающиеся задачи об устойчивости лагранжевых и эйлеровых решений ограниченной задачи трех твердых тел.

В данное издание не включены главы 1-го издания «Теоремы несуществования интегралов» и «Метод Зундмана решения задачи трех тел».

В конце книги приведен список использованной и рекомендуемой литературы, которого нет в 1-м издании.

Часть первая

ОБЩИЕ МЕТОДЫ

Глава I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

В этой главе рассматриваются вкратце некоторые общие теоремы математического анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в дальнейшем часто будут применяться.

§ 1. Теорема Коши. Усиливающие функции

1. Рассмотрим некоторую функцию

$$X(x) = X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, конечную, непрерывную и однозначную при всех вещественных и комплексных значениях аргументов, удовлетворяющих условиям

$$|x_s| \leqslant A_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где A_s — отличные от нуля положительные постоянные.

Допустим, что X является *голоморфной функцией* в области (1.1), т. е. разложима в этой области в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по целым положительным степеням независимых переменных x_s.

Тогда мы можем написать

$$X = \sum P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.2}$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$, удовлетворяющие условиям вида $m_1 + \ldots$ $\ldots, + m_n \geqslant \delta$ $(\delta = 0, 1, 2, \ldots)$.

Коэффициенты ряда (1.2) суть комплексные числа, полностью определяемые значениями частных производных функций X в начале координат.

Действительно, по теореме Тэйлора мы имеем

$$P^{(m_1, \ldots, m_n)} = \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \left[\frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n} X(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \right]_{x=0}. \tag{1.3}$$

Вместо точных значений коэффициентов ряда (1.2) мы будем пользоваться иногда некоторыми их оценками, получаемыми из одной теоремы Коши, которая формулируется следующим образом:

Теорема Коши. *Если M есть некоторый высший предел функции X при всевозможных комплексных значениях величин x_s, модули которых равны соответственно числам A_s, то справедливо следующее неравенство*:

$$\left| P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| < \frac{M}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}} \tag{1.4}$$

для всяких m_s, для которых $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \geqslant \delta$.

Доказательство. Так как значение x_s, модуль которой равен A_s, может быть представлено в виде $A_s e^{i\varphi_s}$ (e — неперово число, $i = \sqrt{-1}$, φ_s — любые вещественные числа), то по условию теоремы имеем неравенство

$$\left| X\left(A_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, A_n e^{i\varphi_n}\right) \right| = \left| X\left(Ae^{i\varphi}\right) \right| \leqslant M. \tag{1.5}$$

Но формула (1.2) дает

$$X\left(Ae^{i\varphi}\right) = \sum P^{(m_1, \ldots, m_n)} A_1^{m_1} e^{m_1 i\varphi_1} \ldots A_n^{m_n} e^{m_n i\varphi_n}, \tag{1.6}$$

причем этот ряд сходится абсолютно при любых вещественных значениях величин φ_s.

Замена i на $-i$ не изменит модулей величин x_s, а поэтому из равенства (1.6) имеем также

$$X\left(Ae^{-i\varphi}\right) = \sum \overline{P}^{\left(m_1', \ldots, m_n'\right)} A_1^{m_1'} e^{-m_1' i\varphi_1} \ldots A_n^{m_n'} e^{-m_n' i\varphi_n}, \tag{1.6'}$$

где для удобства дальнейшей выкладки индексы суммирования заменены другими.

Перемножая абсолютно сходящиеся ряды (1.6) и (1.6′), мы получим опять абсолютно сходящийся ряд

$$X\overline{X} = X\left(Ae^{i\varphi}\right) X\left(Ae^{-i\varphi}\right) =$$
$$= \sum P^{(m_1, \ldots, m_n)} \overline{P}^{\left(m_1', \ldots, m_n'\right)} A_1^{m_1 + m_1'} e^{i\left(m_1 - m_1'\right)\varphi_1} \ldots$$
$$\ldots A_n^{m_n + m_n'} e^{i\left(m_n - m_n'\right)\varphi_n},$$

который можно интегрировать по переменным φ_s в любых конечных пределах, после чего опять получим ряд абсолютно сходящийся.

Интегрируя по каждой из переменных φ_s в пределах от нуля до 2π, мы имеем

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} X\bar{X}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n =$$
$$= \sum P^{(m_1, \ldots, m_n)} \bar{P}^{(m_1', \ldots, m_n')} \prod_{s=1}^{n} A_s^{m_s + m_s'} \int_0^{2\pi} e^{i(m_s - m_s')\varphi_s}\, d\varphi_s.$$

Но каждый из интегралов равен нулю при $m_s' \neq m_s$ и равен 2π при $m_s' = m_s$, а поэтому предыдущее равенство приведется к виду

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |X(Ae^{i\varphi})|^2\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = (2\pi)^n \sum |P^{(m_1, \ldots, m_n)}|^2 A_1^{2m_1} \ldots A_n^{2m_n},$$

откуда в силу (1.5) имеем следующее неравенство:

$$\sum |P^{(m_1, \ldots, m_n)}|^2 A_1^{2m_1} \ldots A_n^{2m_n} < M^2.$$

Так как все слагаемые левой части положительны, то имеем заведомо

$$|P^{(m_1, \ldots, m_n)}|^2 A_1^{2m_1} \ldots A_n^{2m_n} < M^2$$

для любых m_s, для которых $m_1 + \ldots + m_n \geqslant \delta$.

Из последнего неравенства прямо следует неравенство (1.4), называемое *неравенством Коши*, и теорема доказана.

Примечание. Может случиться, что функция X зависит от времени t, оставаясь голоморфной по отношению к переменным x_s при всех значениях t, удовлетворяющих условию $|t - t_0| \geqslant 0$, где t_0 — постоянная.

Тогда, как видно из формулы (1.3), коэффициенты P также будут зависеть от t, а следовательно, A_s и M вообще тоже суть некоторые функции времени.

Однако если величины A_s при $|t - t_0| \geqslant 0$ никогда не обращаются в нули, а величина M остается конечной, то в неравенстве Коши можно взять вместо A_s их положительные низшие пределы, а вместо M его некоторый высший предел, вследствие чего (1.4) дадут постоянные высшие пределы для коэффициентов разложения функции $X(t|x)$.

2. Полученное неравенство Коши мы применим теперь для построения так называемых *усиливающих функций*, играющих важную роль в доказательствах некоторых теорем.

Пусть дана функция X, голоморфная в области (1.1), т. е. разложимая в этой области в абсолютно сходящийся ряд (1.2). Рассмотрим некоторую другую функцию $\hat{X}$ также голоморфную в области (1.1) и представляемую рядом

$$\widehat{X} = \sum \widehat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.7}$$

коэффициенты которого суть положительные постоянные.

Если коэффициенты ряда (1.2) удовлетворяют при всевозможных значениях индексов m_s неравенствам

$$\left| P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| \leqslant \widehat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \tag{1.8}$$

то функция $\widehat{X}$ называется *усиливающей* по отношению к функции X, а ряд (1.7) — *усиливающим рядом* для ряда (1.2)*).

Это соответствие между функциями X и $\widehat{X}$ мы будем обозначать следующим образом:

$$X \ll \widehat{X} \quad \text{или} \quad \widehat{X} \gg X.$$

Теперь очевидно, что неравенство Коши дает возможность построить простейшую усиливающую функцию для X.

Действительно, пусть $\delta = 0$, и положим в (1.7)

$$\widehat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = \frac{M}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}}.$$

Тогда, в силу неравенства Коши, неравенства (1.8) также будут удовлетворены для всех m_s, для которых $\sum m_s \geqslant 0$, а следовательно, функция $\widehat{X}$, определяемая формулой

$$\widehat{X} = \sum M \left(\frac{x_1}{A_1}\right)^{m_1} \left(\frac{x_2}{A_2}\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{x_n}{A_n}\right)^{m_n} = \\ = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{A_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{A_n}\right)}, \tag{1.9}$$

заведомо будет одной из усиливающих функций для X.

Если $\delta = 1$, т. е. если $X(x)$ обращается в нуль в начале координат, то за усиливающую функцию можно взять

$$\widehat{X} = M \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{A_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{A_n}\right)} - 1 \right\}. \tag{1.9'}$$

Наконец, если $\delta = 2$, т. е. если и сама функция X, и все ее первые частные производные обращаются в нуль в начале координат, то усиливающую функцию можно определить формулой

$$\widehat{X} = M \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{A_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{A_n}\right)} - 1 - \frac{x_1}{A_1} - \ldots - \frac{x_n}{A_n} \right\}. \tag{1.9''}$$

*) Функция $\widehat{X}$, усиливающая для X, называется также иногда мажорантной функцией (fonction majorante) для X или даже просто *мажорантой*.

Пусть теперь A есть наименьшее из всех A_s. Тогда функция

$$\hat{X} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{A}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A}\right)\ldots\left(1 - \frac{x_n}{A}\right)} \tag{1.10}$$

также, очевидно, будет усиливающей для X, и притом более простой. Аналогичные, более простые, усиливающие функции можем вывести также из (1.9′) и (1.9″).

Усиливающие функции можно строить, конечно, и бесчисленным множеством других способов.

Сравнивая, например, два ряда

$$1 + \left(\frac{x_1}{A_1} + \ldots + \frac{x_n}{A_n}\right) + \left(\frac{x_1}{A_1} + \ldots + \frac{x_n}{A_n}\right)^2 + \ldots$$

и

$$\left(1 + \frac{x_1}{A_1} + \frac{x_1^2}{A_1^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x_2}{A_2} + \frac{x_2^2}{A_2^2} + \ldots\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1 + \frac{x_n}{A_n} + \frac{x_n^2}{A_n^2} + \ldots\right),$$

после раскрытия всех скобок мы немедленно убедимся, что некоторые коэффициенты первого превышают соответствующие коэффициенты второго, откуда сейчас же следует, что функции

$$\frac{M}{1 - \left(\frac{x_1}{A_1} + \frac{x_2}{A_2} + \ldots + \frac{x_n}{A_n}\right)}, \quad \frac{M}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A}}$$

также будут усиливающими для функции X в случае $\delta = 0$.

Точно так же функции

$$\frac{M\left(\frac{x_1}{A_1} + \frac{x_2}{A_2} + \ldots + \frac{x_n}{A_n}\right)}{1 - \left(\frac{x_1}{A_1} + \frac{x_2}{A_2} + \ldots + \frac{x_n}{A_n}\right)}, \quad \frac{M\,\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A}}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A}}$$

будут усиливающими для функции X, обращающейся в нуль в начале координат, а функции

$$\frac{M\left(\frac{x_1}{A_1} + \frac{x_2}{A_2} + \ldots + \frac{x_n}{A_n}\right)^2}{1 - \left(\frac{x_1}{A_1} + \frac{x_2}{A_2} + \ldots + \frac{x_n}{A_n}\right)}, \quad \frac{M\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A}\right)^2}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A}}$$

будут усиливающими для X в случае $\delta = 2$.

3. Усиливающие функции обладают многими замечательными свойствами, часть которых полезно здесь отметить.

Рассмотрим сначала многочлен, аргументами которого являются некоторые из величин $P^{(m_1, \ldots, m_n)}$ и коэффициенты которого — вещественные положительные числа.

Обозначим такой многочлен символом

$$\Pi\{P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}, \tag{1.11}$$

где $\bar{m}_s$ — некоторые определенные значения индексов m_s, удовлетворяющих условию $\sum m_s \geqslant \delta$ ($\delta = 0, 1, 2, \ldots$).

Заменяя в (1.11) коэффициенты ряда (1.2) соответствующими коэффициентами ряда (1.7), мы получим многочлен

$$\Pi\{\hat{P}^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\} \tag{1.11'}$$

с теми же положительными коэффициентами, как и (1.11).

Так как многочлен (1.11) содержит конечное число членов, а модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых, то мы можем написать неравенство

$$|\Pi\{P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}| \leqslant \Pi\{|P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}|\}.$$

Заменяя аргументы правой части этого неравенства величинами $\hat{P}^{(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)}$, мы в силу неравенств (1.8), справедливых для любых систем индексов, только усилим неравенство и получим следующее:

$$|\Pi\{P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}| \leqslant \Pi\{\hat{P}^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}, \tag{1.12}$$

которое и выражает одно из тех свойств усиливающих функций, что мы хотели отметить.

Допустим теперь, что в результате некоторой процедуры мы получили ряд вида (1.2), о сходимости которого нам ничего заранее не известно.

Пусть нам удалось построить для ряда (1.2) усиливающий ряд (1.7). Таким образом, для любой системы индексов m_s ($\sum m_s \geqslant \delta$) выполняются неравенства (1.8). Тогда мы можем утверждать, что если построенный нами ряд сходится в некоторой области, определяемой условиями (1.1), то исследуемый ряд (1.2) заведомо будет абсолютно сходящимся в той же области.

Таким образом, нахождение или построение усиливающих функций может явиться полезным средством для исследования сходимости рядов, получаемых некоторой формальной процедурой.

Заметим еще, что в некоторых случаях усиливающий ряд с n переменными можно заменить рядом с одним-единственным переменным.

В самом деле, собирая в разложении функции X члены одной и той же степени m, мы можем переписать формулу (1.2) в следующем виде:

$$X = \sum_{m=\delta}^{\infty} X^{(m)} \qquad (\delta = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.13}$$

где
$$X^{(m)} = \sum P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \qquad (1.13')$$
$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m)$ есть целая однородная функция степени m от величин x_s (*форма* m*-й степени*).

Совершенно таким же образом мы представим и функцию $\hat{X}$, усиливающую для X, так что имеем
$$\hat{X} = \sum_{m=\delta}^{\infty} \hat{X}^{(m)}, \qquad (1.14)$$
где соответственно
$$\hat{X}^{(m)} = \sum \hat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \qquad (1.14')$$
а соответствующие коэффициенты форм (1.13′) и (1.14′) удовлетворяют неравенствам (1.8).

Мы можем сказать, что форма $\hat{X}^{(m)}$ — усиливающая для формы $X^{(m)}$, т. е.
$$X^{(m)} \ll \hat{X}^{(m)}.$$

Отсюда следует, наоборот, что если для всякого $m \geqslant \delta$ форма $\hat{X}^{(m)}$ есть усиливающая функция для формы $X^{(m)}$, то и ряд (1.14) будет усиливающим для ряда (1.13).

Обозначим теперь через χ наибольшую из величин $|x_s|$ и рассмотрим ряд, расположенный по степеням положительной переменной
$$\hat{X}^* = \sum_{m=\delta}^{\infty} \hat{P}_m^* \chi^m \qquad (\delta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (1.15)$$
где
$$\hat{P}_m^* = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} \hat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}. \qquad (1.15')$$

Из предыдущего очевидно, что
$$\hat{P}_m^* \chi^m \gg \hat{X}^{(m)},$$
а поэтому также
$$\hat{X}^* \gg X,$$
т. е. мы можем считать ряд (1.15) усиливающим для функции X, определенной рядом (1.13).

§ 2. Теоремы о неявных функциях

1. Применим прежде всего усиливающие функции для доказательства нескольких важных теорем анализа, которыми далее нам придется пользоваться.

Сначала рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $F(x, y)$ — заданная функция вещественных или комплексных переменных x и y, обращающаяся в нуль при $x = y = 0$ и голоморфная при*

$$|x| \leqslant A, \quad |y| \leqslant B.$$

Если $F'_y(0, 0) \neq 0$, то существует единственная функция $y = f(x)$ $(f(0) = 0)$, удовлетворяющая уравнению

$$F(x, y) = 0 \tag{1.16}$$

и голоморфная при $|x| < a$, где $0 < a \leqslant A$.

Пусть

$$F(x, y) = \sum_{m_1+m_2 \geqslant 1} P^{(m_1, m_2)} x^{m_1} y^{m_2} =$$
$$= P^{(1, 0)}x + P^{(0, 1)}y + P^{(2, 0)}x^2 + P^{(1, 1)}xy + P^{(0, 2)}y^2 + \ldots,$$

причем $P^{(0, 1)} \neq 0$, так как по условию $F'_y(0, 0) \neq 0$.

Поэтому, полагая

$$P_{m_1, m_2} = -\frac{P^{(m_1, m_2)}}{P^{(0, 1)}},$$

можем написать уравнение (1.16) в виде

$$y = P_{1, 0}x + P_{2, 0}x^2 + P_{1, 1}xy + P_{0, 2}y^2 + \ldots \tag{1.16'}$$

Требуется доказать, что уравнению (1.16′) удовлетворяет ряд

$$y = f(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots, \tag{1.17}$$

сходящийся абсолютно, пока $|x|$ не превосходит некоторого положительного предела a.

Подставляя ряд (1.17) в равенство (1.16) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = P_{1, 0}, \\ &c_2 = P_{2, 0} + c_1P_{1, 1} + c_1^2P_{0, 2}, \\ &c_3 = P_{3, 0} + c_1P_{2, 1} + c_2P_{1, 1} + c_1^2P_{1, 2} + 2c_1c_2P_{0, 2} + c_1^3P_{0, 3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

из которых все c_k определятся последовательно, в порядке возрастания k, и притом единственным образом.

Легко видеть, что общее выражение для коэффициентов c_k представляет собой многочлен с целыми положительными коэффициентами относительно тех величин $P_{\bar{m}_1, \bar{m}_2}$, для которых $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 \leqslant k$.

Поэтому, применяя обозначение (1.11), можем написать

$$c_k = \Pi\,\{P_{\bar{m}_1, \bar{m}_2}\}. \tag{1.18'}$$

Для доказательства сходимости ряда (1.17) построим сначала усиливающий ряд для ряда (1.16′). Из предыдущего следует, что за такой ряд можно взять разложение функции

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{A}\right)\left(1-\frac{y}{B}\right)}-M-M\frac{y}{B}=\widehat{P}_{1,0}x+\widehat{P}_{2,0}x^2+\widehat{P}_{1,1}xy+\ \ldots,$$

все коэффициенты которого положительны и таковы, что мы имеем $|P_{m_1,m_2}|<\widehat{P}_{m_1,m_2}$ для всех m_1 и m_2 $(m_1+m_2\geqslant 1)$.

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение

$$Y=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{A}\right)\left(1-\frac{Y}{B}\right)}-M-M\frac{Y}{B},\tag{1.19}$$

решение которого также представим в виде ряда

$$Y=\hat{c}_1x+\hat{c}_2x^2+\hat{c}_3x^3+\ \ldots,\tag{1.20}$$

коэффициенты которого определяются единственным образом такими же формулами, как и (1.18′), но дающими для всех $\hat{c}_k$ только положительные значения.

Так как по свойству усиливающих функций

$$|\Pi\{P_{\bar{m}_1,\bar{m}_2}\}|\leqslant\Pi\{\widehat{P}_{\bar{m}_1,\bar{m}_2}\},$$

то мы имеем для всех k неравенства $|c_k|\leqslant\hat{c}_k$, откуда следует, что если ряд (1.20) сходится при $|x|<a$, то ряд (1.17) будет абсолютно сходящимся при том же условии.

Но решение уравнения (1.19), обращающееся в нуль при $x=0$ определяется следующей очевидной формулой:

$$Y=\frac{B^2}{2(B+M)}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4M(B+M)}{B^2}\cdot\frac{x}{A-x}}\right\},$$

правая часть которой может быть разложена в ряд по степеням $\frac{x}{A-x}$, а следовательно, и по степеням x, если

$$\left|\frac{x}{A-x}\right|<\frac{B^2}{4M(B+M)},$$

то есть, если

$$|x|<\frac{A}{1+\frac{4M(B+M)}{B^2}}=a<A.$$

Следовательно, ряд (1.17) заведомо будет сходиться абсолютно при $|x|<a$, и теорема доказана.

Примечание. Если функция $F(x,y)$ есть многочлен относительно x и y, то она голоморфна при любых (конечных) значениях этих переменных, и теорема остается справедливой.

То же замечание относится к случаю, когда $F(x, y)$ есть многочлен относительно одной из двух переменных.

2. Полученный результат обобщается на случай любого числа уравнений, что показывает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть даны m функций $F_s(y_\sigma|x_\nu)$ от $m+n$ вещественных или комплексных переменных y_σ $(\sigma=1, 2, \ldots, m)$ и x_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, уничтожающихся при одновременном равенстве нулю всех аргументов и голоморфных при $|x_\nu| \leqslant A_\nu$, $|y_\sigma| \leqslant B_\sigma$. Если якобиан*

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \left\| \frac{\partial F_s}{\partial y_\sigma} \right\| \tag{1.21}$$

не обращается в нуль, когда все x и y делаются нулями, то существует единственная система функций $y_s = f_s(x_\nu)$ от n переменных, обращающихся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, голоморфных при $|x_\nu| \leqslant a_\nu < A_\nu$ и удовлетворяющих уравнениям

$$F_s(y_\sigma | x_\nu) = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, m). \tag{1.22}$$

Это решение представляется рядами вида

$$y_s = \sum_{m_1+\ldots+m_n \geqslant 1} C_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.23}$$

абсолютно сходящимися при $|x_\nu| \leqslant a_\nu$.

Напишем уравнения (1.22) в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{m} p_{s\sigma} y_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} q_{s\nu} x_\nu + \ldots, \tag{1.22$'$}$$

где определитель $\| p_{s\sigma} \|$ численно равен значению якобиана (1.21) в начале координат и, следовательно, отличен от нуля.

Вводя вместо y_s новые неизвестные z_s подстановкой

$$z_s = \sum_{\sigma=1}^{m} p_{s\sigma} y_\sigma, \tag{1.24}$$

мы преобразуем уравнения (1.22$'$) к виду

$$z_s = \sum_{\nu=1}^{n} q_{s\nu} x_\nu + \ldots, \tag{1.22$''$}$$

где невыписанные члены содержат x и z в степенях выше первой. Стараясь удовлетворить уравнениям (1.22$''$) рядами

$$z_s = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{c}_{s\nu} x_\nu + \sum_{m_1+\ldots+m_n \geqslant 2} \bar{C}_s^{(m_1, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.24$'$}$$

мы получим бесконечную последовательность равенств, определяющих коэффициенты этих рядов в порядке возрастания суммы $m_1 + \ldots + m_n$ от единицы до бесконечности, причем $\bar{c}_{s\nu} = q_{s\nu}$, а все коэффициенты порядка $k = m_1 + \ldots + m_n$ представляются многочленами с целыми положительными коэффициентами относительно тех коэффициентов рядов в (1.22″), порядок которых меньше чем k. Поэтому все коэффициенты рядов (1.24′) определятся однозначно, и мы получим единственную систему рядов, удовлетворяющих формально уравнениям (1.22″).

После этого мы выведем из (1.24) единственную систему рядов (определитель $\| p_{s\sigma} \| \neq 0$), представляющих y_s, удовлетворяющих формально уравнениям (1.22).

Остается доказать сходимость полученных формальных рядов. Построим вспомогательные уравнения

$$Z_s = \sum_{\nu=1}^{n} \hat{q}_{s\nu} x_\nu + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.25}$$

правые части которых — ряды, усиливающие для рядов (1.22″).

Тогда ряды, удовлетворяющие этим вспомогательным уравнениям, будут усиливающими для рядов (1.24′), и достаточно показать, что эти усиливающие ряды сходятся.

Из свойств усиливающих функций следует, что вспомогательные уравнения можно написать в виде

$$Z_s = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{A}\right)\left(1 - \frac{Z_1 + \ldots + Z_m}{B}\right)} - M - M\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{B}, \tag{1.25′}$$

где через A обозначена наименьшая из A_ν, а B — наименьшая из величин $\sum_{\sigma=1}^{m} | p_{s\sigma} | \cdot B_\sigma$.

Полагая

$$Z = Z_1 + \ldots + Z_m, \qquad x = x_1 + \ldots + x_n$$

и складывая все равенства (1.25′), мы получим единственное уравнение

$$Z = \frac{mM}{\left(1 - \frac{x}{A}\right)\left(1 - \frac{Z}{B}\right)} - mM - mM\frac{Z}{B} \tag{1.25″}$$

такого же вида, как и уравнение (1.19).

Поэтому решение уравнения (1.25″), обращающееся в нуль при $x = 0$, может быть представлено в виде ряда, расположенного по степеням x, сходящегося при условии

$$|x| \leqslant \frac{A}{1 + \frac{4mM(B + mM)}{B^2}} = a < A.$$

Так как все уравнения (1.25′) совершенно одинаковы, то ясно, что $Z_1 = \ldots = Z_m = \frac{1}{m} Z$, откуда следует, что каждое из Z_s представляется рядом, расположенным по степеням x и сходящимся при $|x| < a$. А отсюда вытекает, что все ряды (1.24′), удовлетворяющие уравнениям (1.22″), будут абсолютно сходящимися при $|x_\nu| < \frac{a}{n}$, а поэтому при тех же условиях будут абсолютно сходящимися также ряды (1.23), представляющие голоморфное решение системы уравнений (1.22).

3. Обратимся теперь к случаям более общим, чем те, которые мы рассмотрели выше.

Пусть опять дана функция $F(x, y)$, обращающаяся в нуль при $x = y = 0$ и голоморфная при $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$.

Уравнение $F(0, y) = 0$ имеет корень $y = 0$ некоторой кратности. В теореме I $y = 0$ было однократным корнем и ему соответствовало единственное решение уравнения (1.16), обращающееся в нуль вместе с x и голоморфное по крайней мере при достаточно малых значениях $|x|$.

Теперь мы рассмотрим тот случай, когда 0 — корень кратности $n (n > 1)$ уравнения $F(0, y) = 0$, т. е. когда все $n - 1$ первые частные производные от $F(x, y)$ по y обращаются в нуль в начале координат, но n-я производная не равна нулю при $x = y = 0$.

Тогда разложение $F(x, y)$ можно представить в виде

$$F(x, y) = P_0 + P_1 y + \ldots + P_n y^n + P_{n+1} y^{n+1} + \ldots, \tag{1.26}$$

где P_i — ряды, расположенные по степеням x, из которых n первых равны нулю при $x = 0$, тогда как P_n не обращается в нуль при $x = 0$.

Может случиться, что все P_i, для которых $i > n$, тождественно равны нулю, так что F есть многочлен относительно y. Если же F — бесконечный ряд относительно y, то, как показал Вейерштрасс, существует такой многочлен

$$f(x, y) = y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_{n-1} y + p_n, \tag{1.27}$$

коэффициенты которого — голоморфные при $|x| \leqslant A$ функции от x, обращающиеся в нуль при $x = 0$, что имеем

$$F(x, y) \equiv f(x, y) \cdot H(x, y),$$

где $H(x, y)$ — голоморфная при $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$ функция, не обращающаяся в нуль при $x = y = 0$.

Отсюда следует, что уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1.28}$$

имеет те же корни, обращающиеся в нуль при $x=0$, как и уравнение

$$f(x, y)=0, \tag{1.28'}$$

которое является алгебраическим уравнением относительно y и имеет, следовательно, для всякого значения x ровно n корней.

Рассмотрим теперь уравнение (1.28′). Обозначим через $\Delta(x)$ дискриминант этого уравнения, т. е. результат исключения y из двух уравнений $f(x, y)=0$ и $f'_y(x, y)=0$. $\Delta(x)$ есть целый многочлен относительно коэффициентов p_i и, следовательно, голоморфная функция в области точки $x=0$. При $x=0$ дискриминант Δ равен нулю, а так как нули голоморфной функции образуют систему изолированных точек, то мы можем взять такой круг C с центром в начале, чтобы внутри этого круга уравнение $\Delta(x)=0$ не имело другого корня, кроме $x=0$.

Возьмем внутри C какую-либо точку x_0, отличную от начала координат, так что $\Delta(x_0)\neq 0$. Тогда уравнение $f(x_0, y)=0$ имеет n различных корней $y_i(x_0)$, стремящихся к нулю вместе с x_0. Пусть точка x описывает петлю вокруг точки O, выходя из точки x_0.

Вдоль этой петли n корней $y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ уравнения (1.28′) различны и изменяются непрерывно. Выходя из точки x_0 с корнем $y_1(x_0)$, например, и следуя за непрерывным изменением этого корня вдоль петли, мы получим после такого обхода значение, опять удовлетворяющее уравнению $f(x_0, y)=0$. Следовательно, или $y_1(x_0)$ после обхода опять вернется к прежнему значению и функция $y_1(x)$ окажется однозначной и конечной функцией x в области нуля, или после обхода $y_1(x_0)$ перейдет в какую-то другую функцию $y_i(x_0)$.

В этом случае, обходя несколько раз подряд вокруг нуля, мы необходимо придем к первоначальному значению $y_1(x_0)$.

Пусть это случится после p обходов вокруг нуля. Тогда p корней $y_1, y_2, \ldots, y_p$ переставляются в круговом порядке, когда x описывает петлю вокруг начала, и мы скажем, что эти p корней образуют круговую систему, или *цикл*. Если $p=n$, то n корней образуют единственную круговую систему, а если $p<n$, то мы повторим предыдущие рассуждения, исходя от одного из остающихся корней и т. д., пока не исчерпаем все корни.

В результате приходим к следующему предложению.

Корни уравнения $f(x, y)=0$, обращающиеся в нуль при $x=0$, образуют в круге C одну или несколько круговых систем.

Чтобы это предложение было вполне общим, достаточно условиться, что цикл может состоять только из одного корня, который в этом случае есть однозначная функция от x в области $x=0$.

Корни одной и той же круговой системы $y_1, y_2, \ldots, y_p$ можно представить одним общим разложением.

Положим $x = x'^p$. Каждый из корней цикла есть голоморфная функция от x' при всех значениях x', кроме $x' = 0$; с другой стороны, когда x' описывает петлю вокруг точки $x' = 0$, точка x описывает p последовательных петель в том же направлении вокруг начала.

Следовательно, каждый из корней цикла возвращается к своему начальному значению и есть однозначная функция от x' в области $x' = 0$. Так как эти корни стремятся к нулю вместе с x', то точка $x' = 0$ может быть только обыкновенной точкой. Поэтому эти корни будут голоморфными функциями от x' и, следовательно, представляются разложением вида

$$y = c_1 x' + c_2 x'^2 + \ldots + c_k x'^k + \ldots \tag{1.29}$$

Заменяя x' через $x^{\frac{1}{p}}$, будем иметь разложение

$$y = c_1 x^{\frac{1}{p}} + c_2 x^{\frac{2}{p}} + \ldots + c_k x^{\frac{k}{p}} + \ldots; \tag{1.29'}$$

подставляя сюда различные значения корня $\sqrt[p]{x}$, получим все p корней, образующих цикл.

Полагая для этого

$$\lambda_p = \sqrt[p]{1} = e^{\frac{2q\pi i}{p}} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

будем иметь разложение всех корней цикла в виде

$$y_q = c_1 \lambda_p x^{\frac{1}{p}} + c_2 \lambda_p^2 x^{\frac{2}{p}} + \ldots + c_k \lambda_p^k x^{\frac{k}{p}} + \ldots \tag{1.29''}$$

Формулы (1.29″) определят также корни одного и того же цикла и уравнения (1.28).

Чтобы показать, как можно распределить n корней уравнения (1.28) в круговые системы и как вычислить коэффициенты разложений (1.29″), рассмотрим один достаточно общий случай, когда частная производная $F'_x(x, y)$ не обращается в нуль при $x = y = 0$. Тогда разложение $F(x, y)$ обязательно содержит член первой степени относительно x, и мы можем написать уравнение (1.28) в виде

$$F(x, y) = Ax + By^n + \ldots = 0 \qquad (AB \neq 0), \tag{1.30}$$

где невыписанные члены делятся на один из множителей x^2, xy, y^{n+1}. Примем временно в уравнении (1.30) за неизвестную функцию величину x. Тогда, так как $F'_x(0, 0) \neq 0$, то относительно x выполнены условия теоремы 1, и мы можем, следовательно, утверждать, что уравнение (1.30) имеет единственный корень x, стремящийся к нулю вместе с y и голоморфный в области начала координат.

Определяя коэффициенты разложения этого корня по способу неопределенных коэффициентов, мы убедимся, что $n-1$ первых коэффициентов суть нули и что, следовательно, мы имеем

$$x = y^n(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots) \qquad (a_0 \neq 0). \tag{1.30'}$$

Извлекая корень n-й степени из левой и правой частей равенства, мы получим

$$x^{\frac{1}{n}} = y\sqrt[n]{a_0 + a_1 y + \dots} = b_1 y + b_2 y^2 + \dots \qquad (b_1 \neq 0).$$

Обращая ряд и давая $\sqrt[n]{x}$ все его n значений, мы получим разложение y по степеням величины $x^{\frac{1}{n}}$ в виде

$$y = c_1\lambda_n x^{\frac{1}{n}} + c_2\lambda_n^2 x^{\frac{2}{n}} + \dots + c_k\lambda_n^k x^{\frac{k}{n}} + \dots, \tag{1.31}$$

где $\lambda_n = \sqrt[n]{1}$. Этот ряд представляет n корней уравнения (1.30), стремящихся к нулю вместе с x.

4. Изложенное можно обобщить на случай какого угодно числа уравнений с несколькими независимыми переменными. Мы ограничимся рассмотрением следующего случая.

Пусть имеем систему m уравнений вида

$$F_s(y_\sigma \mid x) = 0 \qquad (s = 1, 2, \dots, m), \tag{1.32}$$

где по-прежнему все F_s — голоморфные функции в области начала, обращающиеся в нуль при одновременном равенстве нулю всех своих аргументов, и где x — единственная независимая переменная.

Выписывая только члены первой степени в разложениях функций F_s, мы представим систему (1.32) в виде

$$F_s(y_\sigma \mid x) = \sum_{\sigma=1}^{m} p_{s\sigma} y_\sigma + p_s x + \dots = 0, \tag{1.32'}$$

а поэтому

$$\left[\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots y_m)}\right]_0 = \| p_{s\sigma} \| = \Delta.$$

Если $\Delta \neq 0$, то по теореме 2 уравнения (1.32) имеют единственное решение, стремящееся к нулю вместе с x и определяемое рядами

$$y_s = c_s^{(1)} x + c_s^{(2)} x^2 + \dots + c_s^{(k)} x^k + \dots,$$

абсолютно сходящимися по крайней мере при достаточно малых значениях $|x|$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\Delta = 0$, но среди первых миноров якобиана есть по крайней мере один, не обращающийся в нуль при равенстве нулю всех аргументов.

Не нарушая общности, можем считать, что этот минор есть якобиан первых $m-1$ функций по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, так что

$$\left[\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{m-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})}\right]_0 = \Delta_1 \neq 0.$$

Переписав уравнения (1.32′) в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{m-1} p_{s\sigma} y_\sigma + p_{sm} y_m + p_s x + \ldots = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{1.33}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} p_{m\sigma} y_\sigma + p_m x + \ldots = 0, \tag{1.33′}$$

мы видим, что система (1.33), в которой y_m рассматривается как независимая переменная наравне с x, удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, имеет единственное голоморфное решение, уничтожающееся при $x = y_m = 0$.

В этом решении

$$y_s = \varphi_s(y_m, x) \quad (s = 1, 2, \ldots, m-1); \tag{1.34}$$

$\varphi_s(y_m, x)$ — ряды, расположенные по целым степеням y_m и x, абсолютно сходящиеся в области начала координат.

Подставляя полученные выражения для y_s в уравнение (1.33′), мы получим уравнение с двумя переменными вида

$$F(y_m, x) = 0, \tag{1.34′}$$

левая часть которого голоморфна относительно y_m и x и обращается в нуль при $y_m = x = 0$. Кроме того, легко проверить, что $F'_{y_m}(0, 0) = 0$, вследствие чего мы можем утверждать, что y_m, удовлетворяющая этому уравнению и обращающаяся в нуль вместе с x, есть голоморфная функция от $x^{\frac{1}{p}}$, где p — целое число, не меньшее чем 2.

Поэтому в силу равенств (1.34) все остальные y_s также выйдут голоморфными функциями от $x^{\frac{1}{p}}$ $(p \geqslant 2)$.

Подобным же образом можно рассмотреть и более сложные случаи, в которых не только Δ, но и все миноры якобиана до некоторого порядка $k-1$ включительно обращаются в нуль в начале координат, а среди миноров Δ_k есть хотя бы один, отличный от нуля.

Во всех случаях такого рода система (1.32) будет иметь не одно, а множество решений (конечное число!), обращающихся в нуль вместе с x. В любом из таких решений y_s будут голоморфными функциями некоторой дробной степени $x^{\frac{1}{p}}$ независимой переменной и представятся рядами вида

$$y_s = c_s^{(1)} x^{\frac{1}{p}} + c_s^{(2)} x^{\frac{2}{p}} + \ldots + c_s^{(l)} x^{\frac{l}{p}} + \ldots, \tag{1.35}$$

абсолютно сходящимися по крайней мере в достаточно малой окрестности начала координат.

Примечание. Во всех рассуждениях и выводах этого параграфа все переменные могут принимать как вещественные, так и комплексные значения. Точно так же и коэффициенты рядов, как данных (левые части уравнений), так и искомых (неизвестные функции), могут быть какими угодно комплексными числами.

Однако иногда мы будем иметь дело с уравнениями, все коэффициенты которых — вещественные числа, и нас тогда будут интересовать вещественные значения неизвестных функций, соответствующие вещественным значениям независимых переменных.

Поэтому в каждом таком случае нужно будет дополнительно проверять, что получающиеся решения оказываются на самом деле вещественными. Такая проверка основывается обычно на простых соображениях. Если, например, наша задача заключается в нахождении действительного корня уравнения (1.28′), все коэффициенты которого — вещественные функции вещественной переменной, то мы можем утверждать, что при нечетном n это уравнение обязательно будет иметь по крайней мере один вещественный корень, стремящийся к нулю вместе с x. Этот корень представится поэтому действительным рядом с вещественными коэффициентами.

§ 3. Системы линейных дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.36}$$

коэффициенты которых $p_{s\sigma}$ — заданные функции времени, однозначные и непрерывные для всякого значения t, удовлетворяющего условию $|t - t_0| \geqslant 0$.

Применим для интегрирования системы (1.36) способ, предложенный А. М Ляпуновым, для чего заменим уравнения (1.36) следующими:

$$\dot{x}_s = \alpha \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.36'}$$

где α — вспомогательный параметр.

Пусть $x_s^{(0)}$ — заданные начальные значения величин x_s, соответствующие $t = t_0$ (t_0 — начальный момент).

Будем стараться удовлетворить уравнениям (1.36′) рядами, расположенными по степеням α, следующего вида:

$$x_s = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.37}$$

где $x_s^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — неизвестные функции, обращающиеся в нуль при $t = t_0$.

Подставляя ряды (1.37) в уравнения (1.36′) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α слева и справа, мы получим следующие системы уравнений:

$$\dot{x}_s^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma^{(0)}, \ \ldots, \qquad \dot{x}_s^{(k)} = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma^{(k-1)}, \ \ldots,$$

из которых функции $x_s^{(k)}$ определяются последовательно в порядке возрастания k при помощи квадратур

$$x_s^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma} x_\sigma^{(0)}\, dt, \ \ldots, \quad x_s^{(k)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma} x_\sigma^{(k-1)}\, dt, \ \ldots \tag{1.38}$$

Из этих формул следует, что все функции $x_s^{(k)}$ — непрерывные функции t, обращающиеся в нуль при $t = t_0$.

Остается доказать сходимость рядов, коэффициенты которых определяются формулами (1.38). Для этого обозначим через p постоянное положительное число, большее всех значений, которые может принимать модуль каждой из функций $p_{s\sigma}$ при $|t - t_0| \geqslant 0$, и через $x^{(0)}$ наибольшую из величин $|x_s^{(0)}|$.

Тогда из формул (1.38) выводим последовательно

$$|x_s^{(k)}| \leqslant n^k p^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} x^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^k p^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \alpha^k,$$

представляющий разложение функции $e^{\alpha np|t-t_0|}$, сходится, как известно, для всякого значения t и при любом α.

Поэтому все ряды (1.37) будут абсолютно сходящимися при всяком t и при любом α и будут представлять решение системы (1.36′) с начальными условиями $x_s^{(0)}$.

Полагая теперь в рядах (1.37) $\alpha = 1$, мы получим абсолютно сходящиеся ряды

$$x_s = \sum_{k=0}^{\infty} x_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.39}$$

удовлетворяющие уравнениям (1.36). Эти ряды и представляют общее решение системы (1.36), содержащее n произвольных постоянных $x_s^{(0)}$.

Легко видеть, что все функции $x_s^{(k)}$ $(k > 1)$ суть линейные функции величин $x_s^{(0)}$, а поэтому формулы (1.39) можно представить в следующем виде:

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma^{(0)} x_{s\sigma}, \tag{1.39′}$$

где n^2 функций $x_{s\sigma}$ образуют систему n независимых решений системы (1.36), удовлетворяющих условиям

$$x_{ss}(t_0) = 1, \qquad x_{s\sigma}(t_0) = 0 \qquad (\sigma \neq s).$$

Все эти функции, легко получаемые при помощи формул (1.38), представляются рядами, абсолютно сходящимися для всякого t. Если ввести символ 1_s^σ, полагая

$$1_s^s = 1, \qquad 1_s^\sigma = 0 \qquad (\sigma \neq s),$$

то эти ряды можно написать следующим образом:

$$x_{s\sigma} = 1_s^\sigma + \sum_{k=1}^{\infty} p_{s\sigma}^{(k)}, \tag{1.40}$$

где функции $p_{s\sigma}^{(k)}$ определяются последовательно в порядке возрастания k следующими формулами:

$$p_{s\sigma}^{(1)} = \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma}\, dt, \ \ldots, \qquad p_{s\sigma}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{sr} p_{r\sigma}^{(k-1)}\, dt, \ \ldots \tag{1.40′}$$

Из формул (1.39′) можно получить и другие, содержащие не начальные значения $x_s^{(0)}$, а некоторые другие произвольные постоянные. Действительно, выберем каким-нибудь способом n систем начальных значений $x_{sr}^{(0)}$ при единственном условии, что определитель, элементами которого являются эти числа, не равен нулю. Каждой такой системе чисел $x_{sr}^{(0)}$ соответствует некоторое частное решение системы (1.36), определяемое формулами

$$\hat{x}_{sr}(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_{\sigma r}^{(0)} x_{s\sigma}(t).$$

Определитель $\| \hat{x}_{sr}(t) \|$ не равен тождественно нулю, так как, очевидно, $\| \hat{x}_{sr}(t_0) \| = \| x_{sr}^{(0)} \|$, что не равно нулю по условию. Следовательно, функции $\hat{x}_{\sigma r}(t)$ также образуют систему n линейно независимых решений уравнений (1.36), а поэтому, обозначая через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольные постоянные, мы можем написать общее решение системы (1.36) еще в следующем виде:

$$x_s = \sum_{r=1}^{n} a_r \hat{x}_{sr} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.41}$$

Выведем теперь одну важную формулу, называемую обычно *формулой Лиувилля*. Для этого найдем производную по t от определителя $\Delta = \| \hat{x}_{s\sigma} \|$, дифференцируя последовательно строки определителя и используя при этом тождества

$$\frac{d\hat{x}_{s\sigma}}{dt} \equiv \sum_{r=1}^{n} p_{sr} \hat{x}_{r\sigma}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, получим соотношение

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \sum_{s=1}^{n} p_{ss},$$

откуда интегрированием получаем искомую формулу Лиувилля

$$\Delta = \Delta_0 e^{\int_{t_0}^{t} (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})\, dt}, \tag{1.42}$$

где $\Delta_0 = \Delta(t_0)$. Если за произвольные постоянные взяты начальные значения $x_s^{(0)}$, то $\hat{x}_{s\sigma} \equiv x_{s\sigma}$, а следовательно, $\Delta_0 = \| 1_s^\sigma \| = 1$.

Примечание. Иногда более удобно записывать систему (1.36) в векторной или в матричной форме. Пусть

$$P(t) = \| p_{s\sigma}(t) \|$$

есть матрица n-го порядка, составленная из коэффициентов уравнений (1.36), и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть матрица из одного столбца (вектор) с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда система (1.36) запишется следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x,$$

и это уравнение называется *векторным*.

Всякую матрицу, столбцами которой являются n линейно независимых решений системы (1.36), называют *интегральной матрицей* этой системы. Так, матрицы $X(t) = \| x_{s\sigma}(t) \|$ и $\hat{X}(t) = \| \hat{x}_{s\sigma}(t) \|$ являются интегральными.

Так как каждый столбец матрицы X (или $\hat{X}$) удовлетворяет векторному уравнению, то интегральная матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX}{dt} = P(t)\,X \quad \left(\text{или } \frac{d\hat{X}}{dt} = P(t)\,\hat{X}\right),$$

которое и называется *матричным уравнением*. Зная интегральную матрицу X или $\hat{X}$, мы можем написать общее решение системы (1.36) в следующем виде:

$$x = Xx^{(0)} \quad \text{или} \quad x = \hat{X}a,$$

где $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ — начальный вектор и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор, компонентами которого являются произвольные постоянные. Заметим еще, что, разрешая предыдущие равенства относительно $x^{(0)}$ или a, мы получим *общий интеграл* системы (1.36) в виде

$$X^{-1}x = x^{(0)} \quad \text{или} \quad \hat{X}^{-1}x = a,$$

где X^{-1} (соответственно $\hat{X}^{-1}$) — обратная матрица.

2. Формулы (1.39) и (1.40) пригодны, конечно, и для того случая, когда все $p_{s\sigma}$ — величины постоянные, и представляют тогда решение системы (1.36), как легко проверить, в виде рядов, расположенных по степеням $t - t_0$, абсолютно сходящихся при всяком t. Действительно, при постоянных $p_{s\sigma}$ формулы (1.40′) дают:

$$p_{s\sigma}^{(1)} = p_{s\sigma}\left(t - t_0\right); \quad p_{s\sigma}^{(k)} = \tilde{p}_{s\sigma}^{(k)} \frac{(t - t_0)^k}{k!},$$

где все $\tilde{p}_{s\sigma}^{(k)}$ — постоянные, определяемые последовательно следующими формулами:

$$\tilde{p}_{s\sigma}^{(2)} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}p_{r\sigma}; \quad \tilde{p}_{s\sigma}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}\tilde{p}_{r\sigma}^{(k-1)}.$$

Формулы (1.40) примут в этом случае следующий вид:

$$x_{s\sigma} = 1_s^\sigma + p_{s\sigma}\left(t - t_0\right) + \tilde{p}_{s\sigma}^{(2)} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \ldots + \tilde{p}_{s\sigma}^{(k)} \frac{(t - t_0)^k}{k!} + \ldots \tag{1.40″}$$

Эти формулы могут служить для непосредственного вычисления функций $x_{s\sigma}$, т. е. для непосредственного интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и особенно удобны для числовых вычислений при помощи электронных вычислительных машин. Но для решения уравнений с постоянными коэффициентами в буквенном виде, что часто необходимо, нужно уметь выразить общее решение системы с постоянными коэффициентами через элементарные функции, как это и излагается в известных учебниках. Напомним основные результаты этой теории.

Решение системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами можно искать в виде

$$x_s = K_s e^{\varkappa t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.43}$$

где K_s и $\varkappa$ — некоторые постоянные.

Подставляя (1.43) в уравнения (1.36), найдем условия

$$p_{s1}K_1 + \ldots + (p_{ss} - \varkappa) K_s + \ldots + p_{sn}K_n = 0.$$

Для того чтобы не все K_s были равны нулю, необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при K_s, был равен нулю, откуда следует, что постоянная $\varkappa$ должна быть корнем следующего алгебраического уравнения:

$$P - \varkappa E = 0, \tag{1.44}$$

где $E = \| 1_s^\sigma \|$ — единичная матрица.

Следуя А. М. Ляпунову, мы будем называть (1.44) *определяющим уравнением* (характеристическим — по другой терминологии), а определитель, представляющий его левую часть, — *основным.*

Обозначая этот определитель через $D(\varkappa)$, мы имеем

$$D(\varkappa) = p_0\varkappa^n + p_1\varkappa^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\varkappa + p_n, \tag{1.44'}$$

где $p_0 = (-1)^n$, $p_n = \| p_{s\sigma} \|$, а всякий другой коэффициент p_k равен $(-1)^{n-k}$, помноженной на сумму всех миноров k-го порядка определителя $\| p_{s\sigma} \|$.

Каждому корню $\varkappa_\sigma$ определяющего уравнения соответствуют определенные значения постоянных $K_{s\sigma}$, и когда уравнение (1.44) имеет только простые корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, то получим n решений вида (1.43), которые будут линейно независимыми. Поэтому общее решение системы представится в виде

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} a_\sigma K_{s\sigma} e^{\varkappa_\sigma t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.45}$$

Решая уравнения (1.45) относительно величин $a_s e^{\varkappa_s t}$, мы получим следующие равенства, представляющие общий интеграл

$$K a_s e^{\varkappa_s t} = \sum_{\sigma=1}^{n} \overline{K}_{\sigma s} x_\sigma, \tag{1.45'}$$

где $\overline{K}_{s\sigma}$ — алгебраические дополнения элементов $K_{s\sigma}$ определителя $K = \| K_{s\sigma} \|$. Из (1.45′) найдем также

$$a_s = \frac{1}{K} e^{-\varkappa_s t_0} \sum_{\sigma=1}^{n} \overline{K}_{\sigma s} x_\sigma^{(0)},$$

а подставляя эти выражения в (1.45), получим

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma^{(0)} x_{s\sigma}, \tag{1.45″}$$

где $x_{s\sigma}$ — элементы матрицы X, определяемые формулами

$$x_{s\sigma} = \frac{1}{K} \sum_{r=1}^{n} \overline{K}_{\sigma r} K_{sr} e^{\varkappa_r (t-t_0)}.$$

Заметим, что во всех приведенных формулах мы не различаем случаев вещественных и комплексных корней определяющего уравнения, так что при наличии последних и когда все $p_{s\sigma}$ суть вещественные постоянные, формулы (1.45), (1.45′) и (1.45″) нужно еще привести к действительному виду.

Если определяющее уравнение имеет кратные корни, то уравнения (1.36) вообще будут иметь решения вида

$$x_s = f_s(t) e^{\varkappa t}, \tag{1.46}$$

где $f_s(t)$ — многочлены относительно t, степени которых не выше числа, на единицу меньшего кратности корня.

Если решения типа (1.43) рассматривать как частные случаи решений вида (1.46) (когда $f_s(t)$ — постоянные), то каждому корню кратности μ будет соответствовать μ независимых решений вида (1.46). Притом, если в числе этих решений находится такое, в котором степени по крайней мере некоторых из функций $f_s(t)$ достигают своего высшего предела $\mu - 1$, то, исходя из этого решения, можем получить все μ независимых решений, соответствующих корню $\varkappa$, заменой функций $f_s(t)$ их производными по t от нулевого до $(\mu - 1)$-го порядка включительно.

Мы будем говорить, что в этом случае корню $\varkappa$ соответствует *одна группа решений*. Случай этот представится всякий раз, когда рассматриваемый μ-кратный корень не обращает в нуль по крайней мере один из первых миноров основного определителя $D(\varkappa) = \left\| p_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa \right\|$.

Может случиться, что μ-кратный корень обращает в нуль все миноры $D(\varkappa)$ до $k - 1$-го порядка включительно, не обращая в нуль по крайней мере один из миноров k-го порядка. Тогда этому корню будут соответствовать k групп независимых решений, составленных подобно предыдущей. Высшим пределом для числа k служит μ. Этот высший предел может достигаться, и тогда все решения, соответствующие корню $\varkappa$, будут типа (1.43) (т. е. не будут иметь множителями степень t).

Пусть вообще определяющее уравнение имеет ν различных корней $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$, кратности которых суть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, так что $\sum\limits_{\sigma=1}^{\nu} \mu_\sigma = n$. Пусть каждому корню $\varkappa_\sigma$ кратности μ_σ соответствует k_σ групп независимых решений и каждая из этих групп содержит соответственно $l_1^{(\sigma)}, \ldots, l_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ решений.

Основное решение в каждой из этих групп имеет вид

$$f_{1,\sigma}(t)e^{\varkappa_\sigma t}, \quad f_{2,\sigma}(t)e^{\varkappa_\sigma t}, \ \ldots, \ f_{n,\sigma}(t)e^{\varkappa_\sigma t},$$

где $f_{s,\sigma}(t)$ — многочлены, степени которых не выше чем $l_r^{(\sigma)} - 1$, а каждое из остальных решений, входящих в ту же группу, будет

$$f_{1,\sigma}^{(i)}(t)e^{\varkappa_\sigma t}, \quad f_{2,\sigma}^{(i)}(t)e^{\varkappa_\sigma t}, \ \ldots, \ f_{n,\sigma}^{(i)}(t)e^{\varkappa_\sigma t}$$

((i) обозначает число дифференцирований по t).

Общее решение системы (1.36) имеет вид ($P = \mathrm{const}$)

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{\nu} e^{\varkappa_\sigma t} \sum_{r=1}^{k_\sigma} \sum_{i=1}^{l_r^{(\sigma)}-1} C_{\sigma r}^{(i)} f_{s,\sigma}^{(i)}(t), \qquad (1.46')$$

где $C_{\sigma r}^{(i)}$ обозначают n произвольных постоянных.

Рассмотрим отдельно случай, когда предложенные линейные уравнения имеют каноническую форму. Обозначая неизвестные через x_s и y_s ($s = 1, 2, \ldots, n$) и через H_2 — характеристическую функцию, мы напишем уравнения в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_s}, \qquad (1.47)$$

где H_2 — однородный многочлен второй степени относительно x_s и y_s (квадратичная форма), так что

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum A_{s\sigma}x_s x_\sigma + \frac{1}{2}\sum B_{s\sigma}y_s y_\sigma + \sum C_{s\sigma}x_s y_\sigma, \qquad (1.48)$$

где все коэффициенты A, B, C — постоянные, удовлетворяющие условиям $A_{s\sigma} = A_{\sigma s}$, $B_{s\sigma} = B_{\sigma s}$.

Напишем уравнения (1.47) в раскрытом виде, т. е.:

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} (C_{\sigma s}x_\sigma + B_{\sigma s}y_\sigma), \qquad \dot{y}_s = -\sum_{\sigma=1}^{n} (A_{s\sigma}x_\sigma + C_{s\sigma}y_\sigma), \qquad (1.47')$$

и предположим, что все коэффициенты суть вещественные постоянные. Рассмотрим основной определитель системы (1.47'), который есть определитель порядка $2n$, считая, что переменные располагаются в порядке $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Тогда можем написать $D(\varkappa)$ в виде

$$D(\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} \| C_{\sigma s} - 1_\sigma^s \varkappa \| & \| B_{\sigma s} \| \\ \| A_{s\sigma} \| & \| C_{s\sigma} + 1_s^\sigma \varkappa \| \end{vmatrix}. \qquad (1.48')$$

Легко убедиться в том, что в силу свойств постоянных A и B определитель $D(\varkappa)$ не меняется при замене $\varkappa$ на $-\varkappa$. Действительно, мы имеем

$$C(-\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} \| C_{\sigma s} + 1_\sigma^s \varkappa \| & \cdot \| B_{\sigma s} \| \\ \| A_{s\sigma} \| & \| C_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa \| \end{vmatrix}.$$

Делая в этом определителе строки столбцами и наоборот, имеем

$$D(-\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} \| C_{s\sigma} + 1_s^\sigma \varkappa \| & \| A_{\sigma s} \| \\ \| B_{s\sigma} \| & \| C_{\sigma s} - 1_\sigma^s \varkappa \| \end{vmatrix},$$

а переставляя здесь надлежащим образом строки и столбцы, мы опять придем к определителю $D(\varkappa)$. Таким образом,

$$D(-\varkappa) = D(\varkappa),$$

вследствие чего после раскрытия определителя мы получим многочлен $2n$-й степени, содержащий только четные степени переменной $\varkappa$.

Поэтому $2n$ корней определяющего уравнения распределяются на n пар $\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \ldots, \pm \varkappa_n$, среди которых могут быть, разумеется, и равные.

Примером канонической системы является линейная система второго порядка следующего, часто встречающегося вида:

$$\ddot{x}_s = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n. \qquad (1.49)$$

где $p_{s\sigma}$ — постоянные коэффициенты. Действительно, полагая

$$\dot{x}_s = y_s, \qquad H_2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} y_s^2 - \frac{1}{2} \sum p_{s\sigma} x_s x_\sigma,$$

мы приведем систему (1.49) к виду (1.47), причем

$$A_{s\sigma} = -p_{s\sigma}, \quad B_{s\sigma} = 1_s^\sigma, \quad C_{s\sigma} = 0.$$

Тогда по формуле (1.48) имеем

$$D(\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} -E\varkappa & E \\ -P & +E\varkappa \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (P - E\varkappa^2),$$

откуда непосредственно видно, что определяющее уравнение содержит только четные степени $\varkappa$.

3. Другим важным частным случаем является тот, в котором коэффициенты $p_{s\sigma}$ системы (1.36) суть периодические функции времени с одним и тем же вещественным периодом ω.

Допустим, что мы нашли каким-нибудь способом *) систему независимых решений $x_{s\sigma}$ уравнений (1.36). Так как по условию $p_{s\sigma}(t+\omega)=p_{s\sigma}(t)$, то группа функций $x_{sj}(t+\omega)$, соответствующая какому угодно j, взятому из ряда 1, 2, ..., n, также будет некоторым решением системы (1.36). По свойствам линейных уравнений это решение выразится линейно через основные, а поэтому, обозначая через a_{ij} некоторые постоянные, будем иметь

$$x_{sj}(t+\omega)=a_{1j}x_{s1}(t)+a_{2j}x_{s2}(t)+\ \dots\ +a_{nj}x_{sn}(t). \tag{1.50}$$

При посредстве определенных таким образом постоянных составляем следующее алгебраическое уравнение

$$\| a_{ij} \| - \rho E = 0, \tag{1.51}$$

которое будем называть, следуя А. М. Ляпунову, *характеристичным*, соответствующим периоду ω. Если бы вместо x_{sj} мы взяли какую-либо другую систему n независимых решений, то получили бы вообще другие значения для постоянных a_{ij}, но коэффициенты A_s характеристичного уравнения, приведенного к виду

$$\rho^n+A_1\rho^{n-1}+\ \dots\ +A_{n-1}\rho+A_n=0, \tag{1.51$'$}$$

остались бы прежними. В этом состоит одно из основных свойств этих коэффициентов (а следовательно, и корней характеристичного уравнения), в силу которого они могут быть названы *инвариантами*. Действительно, пусть $\bar{x}_{sj}$ — другая система независимых решений. Тогда будем иметь для нее

$$\bar{x}_{sj}(t+\omega)=\bar{a}_{1j}\bar{x}_{s1}(t)+\bar{a}_{2j}\bar{x}_{s2}(t)+\ \dots\ +\bar{a}_{nj}\bar{x}_{sn}(t), \tag{1.50$'$}$$

где $\bar{a}_{ij}$ вообще отличны от a_{ij}. С другой стороны,

$$\bar{x}_{sj}(t)=\tilde{a}_{1j}x_{s1}(t)+\tilde{a}_{2j}x_{s2}(t)+\ \dots\ +\tilde{a}_{nj}x_{sn}(t), \tag{1.50$''$}$$

где $\tilde{a}_{ij}$ — некоторые постоянные. В матричном виде зависимости (1.50), (1.50′), (1.50″) запишутся следующим образом:

$$X(t+\omega)=X(t)A, \quad \overline{X}(t+\omega)=\overline{X}(t)\overline{A}, \quad \overline{X}(t)=X(t)\tilde{A},$$

где $X(t)$, $\overline{X}(t)$ — интегральные матрицы, а A, $\overline{A}$, $\tilde{A}$ — матрицы составленные из коэффициентов a, $\bar{a}$, $\tilde{a}$ соответственно. Далее получаем

$$\overline{X}(t+\omega)=X(t+\omega)\tilde{A}=X(t)A\tilde{A}.$$

---

*) Для этого можем использовать способ А. М. Ляпунова, изложенный в разделе 1 этого параграфа. Но можно, разумеется, воспользоваться и каким-нибудь другим методом.

С другой стороны, имеем

$$X(t)=\overline{X}(t)\tilde{A}^{-1},$$

а поэтому

$$\overline{X}(t+\omega)=\overline{X}(t)\tilde{A}^{-1}A\tilde{A}=\overline{X}(t)\overline{A},$$

откуда

$$\overline{A}=\tilde{A}^{-1}A\tilde{A}.$$

Поэтому определитель из $\bar{a}_{ij}$ может быть представлен в виде

$$|\overline{A}-\rho E|=|\tilde{A}^{-1}A\tilde{A}-\rho\tilde{A}^{-1}E\tilde{A}|=|\tilde{A}^{-1}(A-\rho E)\tilde{A}|=|A-\rho E|,$$

откуда и следует доказательство отмеченного свойства.

Из всех коэффициентов A_s только A_n выражается просто через коэффициенты $p_{s\sigma}$ системы (1.36).

В самом деле, формула Лиувилля (1.42) дает

$$\Delta(t+\omega)=\Delta(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t+\omega}(p_{11}+\ldots+p_{nn})\,dt}=\Delta(t)e^{\int\limits_{t}^{t+\omega}(p_{11}+\ldots+p_{nn})\,dt},$$

откуда, в силу периодичности коэффициентов p_{ss}, получим

$$\Delta(t+\omega)=\Delta(t)e^{\int\limits_{0}^{\omega}(p_{11}+\ldots+p_{nn})\,dt}.$$

Но формулы (1.50) показывают, что определитель $\Delta(t+\omega)$ равен произведению определителя $\Delta(t)$ на определитель $\|a_{ij}\|$, вследствие чего предыдущее равенство приведется к виду

$$(-1)^n A_n=\|a_{ij}\|=e^{\int\limits_{0}^{\omega}(p_{11}+\ldots+p_{nn})\,dt}. \tag{1.52}$$

Из (1.52) следует, что *характеристичное уравнение не может иметь равных нулю корней* и что если оно имеет отрицательные корни, то *число таких корней всегда будет четным.*

Установим теперь аналитический вид решений системы (1.36) с периодическими коэффициентами. Пусть ρ — корень характеристичного уравнения (1.51). Положим $\varkappa=\frac{1}{\omega}\ln\rho$ и покажем, что уравнения (1.36) имеют частное решение

$$x_s=f_s(t)e^{\varkappa t}\qquad(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1.53}$$

где все $f_s(t)$ — периодические функции с периодом ω.

Из (1.53) мы имеем

$$x_s(t+\omega)=f_s(t+\omega)e^{\varkappa\omega}e^{\varkappa t}=\rho f_s(t)e^{\varkappa t},$$

откуда следует, что функции (1.53) обладают свойством

$$x_s(t+\omega)=\rho x_s(t). \tag{1.53'}$$

Но если x_s — решение системы (1.36), то мы имеем

$$x_s = b_1 x_{s1} + b_2 x_{s2} + \dots + b_n x_{sn},$$

где b_j — некоторые постоянные. В силу (1.53′)

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_{sj}(t+\omega) = \rho \sum_{j=1}^{n} b_j x_{sj}(t)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{si}(t) = \rho \sum_{i=1}^{n} b_i x_{si}(t).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при x_{si}, получим для определения b_j следующую систему однородных уравнений:

$$a_{i1} b_1 + \dots + (a_{ii} - \rho) b_i + \dots + a_{in} b_n = 0.$$

Так как ρ — корень уравнения (1.51), то определитель этой системы равен нулю и система заведомо имеет ненулевые решения, откуда следует, что функции (1.53) действительно представляют частное решение уравнений (1.36).

Если характеристичное уравнение не имеет кратных корней, то система (1.36) имеет n частных решений вида (1.53), которые, очевидно, линейно независимы. Поэтому, если $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ — различные корни уравнения (1.51), то общее решение системы (1.36) с периодическими коэффициентами напишется следующим образом:

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} C_\sigma f_{s\sigma}(t) e^{\varkappa_\sigma t} \qquad (s = 1, 2, \dots, n), \tag{1.54}$$

где все $f_{s\sigma}(t)$ — периодические функции с периодом ω, C_s — произвольные постоянные, а $\varkappa_s = \frac{1}{\omega} \ln \rho_s$ называются *характеристическими показателями.*

В случае существования кратных корней характеристичного уравнения система (1.36) с периодическими коэффициентами может допускать решения более общего вида. А именно, кратному корню ρ могут соответствовать решения, для которых функции $f_s(t)$ в (1.53) будут представляться выражениями

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{m} t^k f_{sk}(t) \tag{1.54′}$$

при условии, что все $f_{sk}(t)$ — периодические функции от t с периодом ω.

Чтобы указать общий способ составления характеристичного уравнения, предположим, что исходная система функций $x_{s\sigma}$ выбрана так, что $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$. Тогда из (1.50) непосредственно следует, что $a_{sj} = x_{sj}(t_0 + \omega)$, и следовательно, характеристичное уравнение будет иметь вид

$$\| x_{sj}(t_0 + \omega) \| - \rho E = 0. \tag{1.55}$$

Величины $x_{sj}(t_0 + \omega)$ можно вычислить по формулам (1.40), которые дают

$$x_{sj}(t_0 + \omega) = 1_s^j + \sum_{k=1}^{\infty} p_{sj}^{(k)}(t_0 + \omega),$$

где величины $p_{sj}^{(k)}$ определяются последовательно формулами

$$p_{sj}^{(1)}(t_0 + \omega) = \int_{t_0}^{t_0+\omega} p_{sj}(t)\, dt = \int_0^{\omega} p_{sj}(t)\, dt,$$

$$p_{sj}^{(k)}(t_0 + \omega) = \sum_{r=1}^{n} \int_{t_0}^{t_0+\omega} p_{sr} p_{rj}^{(k-1)}\, dt.$$

Существуют и другие способы составления характеристичного уравнения. Например, часто встречается случай, когда коэффициенты $p_{s\sigma}$, будучи периодическими функциями t, зависят еще от одного или нескольких малых параметров μ_r, по отношению к которым они голоморфны при $|\mu_r| \leqslant \bar{\mu}$.

Тогда, как будет показано ниже *), всякое решение системы (1.36) будет голоморфным относительно μ_r в той же области. Поэтому и все $x_{s\sigma}$ будут обладать этим же свойством, откуда следует сразу теорема А. М. Ляпунова.

Теорема А. М. Ляпунова. *Коэффициенты A_s характеристичного уравнения являются голоморфными функциями параметров μ_r в области $|\mu_r| \leqslant \bar{\mu}$.*

4. Допустим теперь, что предложенная система имеет каноническую форму

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial y_s}, \quad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.56}$$

в которой H_2 — квадратичная форма переменных x_s и y_s, коэффициенты которой — периодические функции.

Тогда имеет место следующая важная теорема А. М. Ляпунова:

Теорема А. М. Ляпунова. *Если предложенная система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами имеет каноническую форму, то соответствующее ей характеристичное уравнение всегда возвратное.*

Для доказательства рассмотрим два каких-либо решения системы (1.56): x_{s1}, y_{s1} и x_{s2}, y_{s2}. Обозначая через $H_2^{(i)}$ резуль-

*) См. теоремы следующего параграфа.

тат замены в H_2 величин x_s, y_s величинами x_{si}, y_{si}, мы найдем

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}(x_{j1}y_{j2}-x_{j2}y_{j1})=$$
$$=-\sum_{j=1}^{n}\left(x_{j1}\frac{\partial H_2^{(2)}}{\partial x_{j2}}-x_{j2}\frac{\partial H_2^{(1)}}{\partial x_{j1}}+y_{j1}\frac{\partial H_2^{(2)}}{\partial y_{j2}}-y_{j2}\frac{\partial H_2^{(1)}}{\partial y_{j1}}\right).$$

Но правая часть этого равенства тождественно равна нулю, так как представляет функцию, уничтожающуюся при одновременном равенстве нулю всех аргументов и обладает (как нетрудно проверить) тождественно равными нулю частными производными.

Вследствие этого мы приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^{n}(x_{j1}y_{j2}-x_{j2}y_{j1})=\text{const},$$

которым будут таким образом связаны всякие два решения системы (1.56). Следовательно, если рассмотрим $2n$ линейно независимых решений этой системы, то между ними будут существовать $n(2n-1)$ соотношений вида

$$\sum_{j=1}^{n}(x_{ji}y_{jk}-x_{jk}x_{ji})=C_{ik}, \tag{1.57}$$

в которых постоянные $C_{ik}=-C_{ki}$ $(i, k=1, 2, \ldots, 2n)$ вследствие независимости рассматриваемых решений будут таковы, что во всякой группе их C_{i1}, C_{i2}, ..., $C_{i,2n}$, каково бы ни было данное число i, найдется по крайней мере одна постоянная C_{ik}, соответствующая отличному от i числу k, которая не будет нулем.

Обозначая теперь через $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ корни характеристичного уравнения системы (1.56), допустим, что наши решения выбраны так, чтобы функции $x_{s\sigma}$, $y_{s\sigma}$ были вида $x_{s\sigma}=f_{s\sigma}(t)\rho_\sigma^{\frac{t}{\omega}}$, $y_{s\sigma}=\varphi_{s\sigma}(t)\rho_\sigma^{\frac{t}{\omega}}$, где $f_{s\sigma}(t)$, $\varphi_{s\sigma}(t)$ — или периодические функции, или (если есть кратные корни) суммы конечного числа членов, представляющих произведения из периодических функций на степени t.

Тогда равенство (1.57) приведется к виду

$$(\rho_i\rho_k)^{\frac{t}{\omega}}\sum_{j=1}^{n}[f_{ji}(t)\varphi_{jk}(t)-f_{jk}(t)\varphi_{ji}(t)]=C_{ik},$$

откуда заключаем, что если C_{ik} — не нуль, то необходимо будет $\rho_i\rho_k = 1$. А так как по замеченному выше для каждого данного i можно найти отличное от него число k, при котором C_{ik} не будет нулем, то отсюда следует, что каждому корню ρ_i характеристичного уравнения будет соответствовать корень ρ_i^{-1}, и что если уравнение это имеет корень $+1$ или -1, то последний всегда будет кратным.

Вследствие этого можем утверждать, что если характеристичное уравнение системы (1.56) не имеет кратных корней, то между коэффициентами его будут существовать соотношения

$$A_{2n} = 1, \quad A_{2n-s} = A_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (1.58)$$

(что легко проверяется при помощи известных формул Виета).

Но, доказав соотношения (1.58) для случая простых корней, легко убедиться в справедливости их и для случая кратных. Для этого можно рассуждать, как показывает А. М. Ляпунов, следующим образом: в функции H_2, которая имеет вид (1.48), но с периодическими коэффициентами, заменим коэффициенты $A_{s\sigma}$, $B_{s\sigma}$, C_{ss} и $C_{s\sigma}$ (для $s \neq \sigma$) величинами $\varepsilon A_{s\sigma}$, $\varepsilon B_{s\sigma}$, $\varkappa_s + \varepsilon(C_{ss} - \varkappa_s)$, $\varepsilon C_{s\sigma}$, где ε — произвольный параметр, а $\varkappa_s$ — какие-нибудь постоянные, для которых числа

$$e^{\varkappa_s\omega}, \quad e^{-\varkappa_s\omega} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.59)$$

все различны, и рассмотрим каноническую систему с измененной функцией H_2. Система эта при $\varepsilon = 0$ обращается в каноническую систему с постоянными коэффициентами, для которой числа $\varkappa_s$, $-\varkappa_s$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) будут корнями определяющего уравнения, а, следовательно, числа (1.59) — корнями характеристичного уравнения, соответствующего периоду ω *). Поэтому, замечая, что для нашей новой системы коэффициенты характеристичного уравнения будут непрерывными функциями ε, так как в силу теоремы А. М. Ляпунова, установленной в предыдущем разделе, являются голоморфными функциями при всяком ε, и принимая в расчет, что по условию все числа (1.59) различны, заключим, что характеристичное уравнение этой системы не будет иметь кратных корней ни при $\varepsilon = 0$, ни при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$. Поэтому для таких значений ε будут выполняться соотношения (1.58). Но в таком случае соотношения эти, как выражающие равенства между целыми функциями ε, необходимо будут выполняться для всяких его значений, а следовательно, и для $\varepsilon = 1$, когда наша новая система переходит в первоначальную.

*) Уравнения с постоянными коэффициентами можно рассматривать, очевидно, как уравнения с периодическими коэффициентами.

Таким образом, теорема А. М. Ляпунова доказана полностью *).

В заключение этого параграфа напомним общий метод Лагранжа для интегрирования системы линейных, неоднородных, уравнений. Пусть дана система

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + R_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.60}$$

где $p_{s\sigma}$ — непрерывные функции t и где **свободные члены** R_s — также заданные непрерывные функции времени.

Допустим, что нам известна интегральная матрица $\| x_{s\sigma} \|$ однородной системы (1.36). Тогда, обозначая через C_s произвольные постоянные, напишем общее решение однородной системы, соответствующей (1.60), в виде

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} C_\sigma x_{s\sigma} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.61}$$

По методу Лагранжа мы сохраняем формулы (1.61) также и для неоднородной системы, рассматривая все C_s уже как некоторые, неизвестные, функции времени. Иными словами, мы вводим в (1.60) вместо x_s новые переменные C_s посредством линейной подстановки (1.61), коэффициенты которой $x_{s\sigma}$ суть известные функции.

Дифференцируя равенства (1.61), мы имеем

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} \dot{C}_\sigma x_{s\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{n} C_\sigma \dot{x}_{s\sigma}. \tag{1.61'}$$

Подставляя теперь выражения (1.61) и (1.61') в уравнения (1.60), мы найдем в силу уравнений (1.36)

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \dot{C}_\sigma x_{s\sigma} = R_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.62}$$

Так как определитель $\Delta = \| x_{s\sigma} \|$ отличен от нуля при любом t (что следует из формулы Лиувилля), то мы можем разрешить уравнения (1.62) относительно величин $\dot{C}_s$.

Обозначая для этого через $\Delta_{s\sigma}$ алгебраические дополнения элементов $x_{s\sigma}$ определителя Δ, мы получим

$$\dot{C}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i\sigma}}{\Delta} R_i \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n),$$

*) Теорема А. М. Ляпунова опубликована в 1892 г. в его знаменитом сочинении «Общая задача об устойчивости движения», которое было переведено на французский язык и издано в Тулузе в 1907 г. Однако и в настоящее время теорема Ляпунова приписывается иногда другим авторам.

откуда интегрированием найдем

$$C_\sigma = \bar{C}_\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{i\sigma}}{\Delta} R_i \, dt \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.63}$$

где $\bar{C}_s$ — постоянные интегрирования.

Подставляя теперь полученные выражения для C_s в формулы (1.61), мы найдем общее решение неоднородной системы

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} \bar{C}_\sigma x_{s\sigma} + \bar{x}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.64}$$

где

$$\bar{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{s\sigma} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{i\sigma}}{\Delta} R_i \, dt \tag{1.64'}$$

суть функции, образующие некоторое частное решение системы неоднородных уравнений (1.60).

Формулы (1.64′) довольно громоздки, так как содержат в себе определители, элементы которых представляются бесконечными рядами. Можно получить для $\bar{x}_s$ более простые формулы, применяя к системе (1.60) способ А. М. Ляпунова.

Заменим систему (1.60) системой с параметром α

$$\dot{x}_s = R_s + \alpha \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \tag{1.65}$$

и будем искать частное решение этой системы в виде

$$\bar{x}_s = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{x}_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.66}$$

Так же как и в разделе 1, находим без труда

$$\bar{x}_s^{(0)} = \int_{t_0}^{t} R_s \, dt, \ \ldots, \ \bar{x}_s^{(k)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma} \bar{x}_s^{(k-1)} \, dt, \ \ldots \tag{1.66'}$$

Легко доказать (так же как и в разделе 1), что ряды (1.66) сходятся абсолютно при всяком t и при любом α, так что, полагая $\alpha = 1$, получим абсолютно сходящиеся ряды, представляющие частное решение системы (1.60).

П р и м е ч а н и е. Все изложенное в этом параграфе распространяется без всяких затруднений на линейные системы второго и более высокого порядка.

§ 4. Основные теоремы о нелинейных уравнениях

1. Переходя к изложению некоторых, нужных нам для дальнейшего, результатов из области теории нелинейных дифференциальных уравнений, рассмотрим прежде всего основную теорему А. М. Ляпунова, позволяющую не только провести с полной строгостью и наиболее просто доказательство существования решения, но и приводящую вместе с тем к весьма удобному практическому приему для нахождения приближенного решения.

Эту теорему мы сформулируем следующим образом.

Теорема А. М. Ляпунова. *Пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.67}$$

где X_s — данные функции t и величин x_s, уничтожающиеся при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, непрерывные по отношению к t при $|t - t_0| \geqslant 0$ и голоморфные относительно x_s для всякого t в области $|x_s| \leqslant A_s$, где A_s — такие непрерывные функции t, которые никогда не делаются нулями. Пусть, кроме того, функции X_s таковы, что, обозначая через M_s некоторый высший предел модуля совокупности членов выше первого измерения в разложении X_s при всевозможных комплексных значениях x_s, модули которых равны A_s, мы можем принять за величины A_s, M_s такие функции t, чтобы для всякого $T > 0$, при t, изменяющемся в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$, для каждой из функций A_s существовал некоторый положительный низший предел, а для каждой из функций M_s — некоторый высший предел.

Тогда, если $A_0 = \min|A_s(t_0)|$, то при всяких $|x_s^{(0)}| < A$ найдется такой предел $T > 0$, что функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (1.67) и принимающие значения $x_s^{(0)}$ при $t = t_0$, представятся абсолютно сходящимися рядами, расположенными по степеням $x_s^{(0)}$, для всякого t в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$.

Обращаясь к доказательству, покажем сначала, что существует единственная система рядов, расположенных по степеням $x_s^{(0)}$ и формально удовлетворяющих уравнениям (1.67).

Представим эти уравнения в следующей форме:

$$\dot{x}_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + \overline{X}_s, \tag{1.67'}$$

где $p_{s\sigma}$ — непрерывные для $|t| \geqslant t_0$ функции t, а

$$\overline{X}_s = \sum_{m=2}^{\infty} X_s^{(m)}(t \mid x_\sigma), \tag{1.68}$$

причем $X_s^{(m)}$ — формы m-й степени вида (1.13′), т. е.

$$X_s^{(m)} = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(t)\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.68′}$$

коэффициенты которых — непрерывные для $|t| \geqslant t_0$ функции.

Будем искать решение уравнений (1.67′) в виде рядов

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + \ldots + x_s^{(m)} + \ldots, \tag{1.69}$$

рассматривая величины $x_s^{(m)}$ вместе с их производными по t как обладающие m-м измерением.

Подставляя ряды (1.69) в уравнения (1.67′) и приравнивая в каждом из последних совокупности членов одинакового измерения в левой и правой частях равенств, мы получим для определения $x_s^{(m)}$ следующие системы уравнений:

$$\dot{x}_s^{(1)} = p_{s1} x_1^{(1)} + p_{s2} x_2^{(1)} + \ldots + p_{sn} x_n^{(1)}, \tag{1.70}$$

и для $m \geqslant 2$:

$$\dot{x}_s^{(m)} = p_{s1} x_1^{(m)} + p_{s2} x_2^{(m)} + \ldots + p_{sn} x_n^{(m)} + R_s^{(m)}. \tag{1.70′}$$

Здесь $R_s^{(m)}$ ($m = 2, 3, \ldots$) — известные целые рациональные функции величин $x_\sigma^{(\mu)}$ с коэффициентами, представляющими суммы произведений коэффициентов форм (1.68′) на целые положительные числа. Легко видеть притом, что все $R_s^{(m)}$ будут зависеть (при данном m) только от тех $x_\sigma^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$. Например, $R_s^{(2)} = X_s^{(2)}(t \mid x_s^{(1)})$ *).

Таким образом, если все функции $x_\sigma^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, уже найдены, то величины $R_s^{(m)}$ сделаются известными функциями времени и уравнения (1.70′) будут линейными, неоднородными, отличающимися при различных m только свободными членами. Поэтому, найдя общее решение однородной системы (1.70), можно будет определять функции $x_s^{(m)}$ ($m \geqslant 1$) последовательно в порядке возрастания m путем квадратур.

Как было показано выше, всегда можно найти группу n^2 функций, образующих интегральную матрицу системы (1.70), определенных и непрерывных для всякого $|t| \geqslant t_0$. Обозначая эти функции вообще через $x_{s\sigma}$, напишем общее решение системы (1.70) в виде

$$x_s^{(1)} = a_1 x_{s1} + a_2 x_{s2} + \ldots + a_n x_{sn} \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.71}$$

---

*) Заметим, что все $R_s^{(m)}$, рассматриваемые как функции величин $x_\sigma^{(\mu)}$, обладают некоторой однородностью относительно верхних значков: в каждом члене выражения $R_s^{(m)}$ сумма всех верхних значков $x_\sigma^{(\mu)}$ равна m.

где a_s — произвольные постоянные. Если притом функции $x_{s\sigma}$ выбраны согласно условиям $x_{s\sigma}(t_0)=1_s^\sigma$, то имеем $a_s=x_s^{(1)}(t_0)$, и произвольными постоянными будут служить начальные значения функций $x_s^{(1)}$.

После того как функции $x_s^{(1)}$ найдены, все остальные $x_s^{(m)}$ найдутся по формулам вида (1.64), в которых произвольные постоянные можно выбирать как угодно (так как n произвольных постоянных мы уже ввели формулами (1.71)), лишь бы получаемые ряды, по крайней мере в известных пределах, были сходящимися. Мы вполне определим постоянные, возникающие при интегрировании систем (1.70), если введем условие, чтобы все $x_s^{(m)}$, для которых $m>1$, обращались в нуль при $t=t_0$. Тогда, если вдобавок $x_{s\sigma}(t_0)=1_s^\sigma$, то постоянные a_s — начальные значения неизвестных функций, т. е.

$$a_s=x_s(t_0)=x_s^{(0)} \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n). \tag{1.72}$$

Теперь по формулам (1.64′) имеем

$$x_s^{(m)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{sj}\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}R_i^{(m)}\,dt \qquad (m=2,\,3,\,\ldots), \tag{1.73}$$

и функции, определяемые этими формулами, остаются определенными и непрерывными для всякого $|t|\geqslant t_0$, так как $\Delta=\|x_{s\sigma}\|$ никогда не обращается в нуль, и равны нулю при $t=t_0$.

При этом из свойства функций $R_s^{(m)}$, как однородных относительно верхних значков величин $x_\sigma^{(\mu)}$, немедленно выводим, что все функции $x_s^{(m)}$ будут целыми однородными функциями m-й степени относительно постоянных a_s.

Поэтому этим функциям можно придать вид

$$x_s^{(m)}=\sum x_s^{(m_1,\,m_2,\,\ldots,\,m_n)}\,a_1^{m_1}a_2^{m_2}\,\ldots\,a_n^{m_n}, \tag{1.73′}$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные числа m_s, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{s=1}^{n}m_s=m$, а все коэффициенты — непрерывные функции, уничтожающиеся при $t=t_0$.

Теперь формулы (1.69) дают функции, удовлетворяющие уравнениям (1.67) в виде

$$x_s=a_1x_{s1}+\ldots+a_nx_{sn}+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{sj}\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}R_i^{(m)}\,dt \tag{1.74}$$

или в виде

$$x_s = a_1 x_{s1} + a_2 x_{s2} + \ldots + a_n x_{sn} + \sum x_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}, \tag{1.74'}$$

т. е. в виде рядов, расположенных по степеням произвольных постоянных a_s. Если же $x_{s\sigma}$ выбраны по условиям $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, то ряды эти располагаются по степеням величин $x_s^{(0)}$.

2. Обращаемся теперь к исследованию сходимости рядов (1.74). Пусть T — некоторое конечное, произвольно назначаемое положительное число. Так как все функции $x_{s\sigma}$ непрерывны в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$, то таковыми же будут и определитель Δ, и все определители $\Delta_{s\sigma}$. Так как Δ не обращается в нуль ни при каком значении t, то будут также непрерывными и все отношения $\Delta_{s\sigma}/\Delta$.

Поэтому, по свойствам непрерывных функций, при t, не выходящем из границ $t_0 - T$ и $t_0 + T$, можно назначить некоторые постоянные (зависящие от T) высшие пределы для модулей всех величин $x_{ii} - 1$, x_{ij} $(j \neq i)$ и для модулей величин $\frac{\Delta_{ii}}{\Delta} - 1$, $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ $(j \neq i)$. Пусть K есть такой высший предел для величин первой группы, а K' — для величин второй группы, так что имеем

$$\left.\begin{aligned} &|x_{ii}| < 1 + K, \qquad |x_{ij}| < K \qquad (j \neq i),\\ &\left|\frac{\Delta_{ii}}{\Delta}\right| < 1 + K', \qquad \left|\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\right| < K' \qquad (j \neq i) \end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

для всех значений t в указанном выше промежутке.

Заметим, что если функции $x_{s\sigma}$, выбраны так, что мы имеем $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, то за величины K и K' можно взять такие непрерывные функции T, которые будут обращаться в нуль при $T = 0$.

Обозначим теперь через $\{u\}$ результат замены в какой-либо целой функции u от величин a_s всех членов их модулями. Тогда формулы (1.71) дают

$$\{x_s^{(1)}\} = |a_1| \cdot |x_{s1}| + |a_2| \cdot |x_{s2}| + \ldots + |a_n| \cdot |x_{sn}|,$$

откуда, обозначая через a наибольшую из $|a_s|$ и имея в виду неравенства (1.75), получим неравенства

$$\{x_s^{(1)}\} < (1 + nK)\, a. \tag{1.76}$$

Подобным же образом формулы (1.73) дают

$$\{x_s^{(m)}\} = |x_{s1}| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\Delta_{i1}}{\Delta}\right| \{R_i^{(m)}\}\, dt + \ldots + |x_{sn}| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\Delta_{in}}{\Delta}\right| \{R_i^{(m)}\}\, dt,$$

откуда в силу неравенств (1.75) выводим неравенства

$$\{x_s^{(m)}\} < \int\limits_{t_0-T}^{t_0+T} \{R_i^{(m)}\}\,dt + (K+K'+nKK')\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0-T}^{t_0+T}\{R_i^{(m)}\}\,dt. \qquad (1.76')$$

Неравенства (1.76) и (1.76′) будут справедливы для всякого значения t в промежутке от t_0-T до t_0+T.

Так как, далее, $R_i^{(m)}$ есть целая рациональная функция величин $x_\sigma^{(\mu)}$ $(\mu < m)$, коэффициентами которой являются суммы произведений коэффициентов $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ на целые положительные числа, то величину $\{R_i^{(m)}\}$ получим, заменяя в выражении для $R_i^{(m)}$ все величины $x_\sigma^{(\mu)}$ величинами $\{x_\sigma^{(\mu)}\}$ и все $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ их модулями. Поэтому, заменяя $\{x_\sigma^{(\mu)}\}$, $\left|P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}\right|$ их высшими пределами, найдем высший предел для величины $\{R_i^{(m)}\}$.

Обозначим теперь через $x^{(\mu)}$ некоторый общий высший предел величин $\{x_s^{(\mu)}\}$ в промежутке $(t_0-T,\ t_0+T)$, а через $R^{(m)}$ обозначим то, во что обратится каждая из функций $R_s^{(m)}$ после замены $x_\sigma^{(\mu)}$ величинами $x^{(\mu)}$ и величин $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ некоторыми, не зависящими от нижнего значка высшими пределами их числовых значений в тех же пределах изменяемости t.

Тогда из (1.76′) получим

$$\{x_s^{(m)}\} < 2(1+nK)(1+nK')TR^{(m)}.$$

Следовательно, мы можем принять

$$\left.\begin{aligned} &x^{(1)} = (1+nK)\,a, \\ &x^{(m)} = 2(1+nK)(1+nK')TR^{(m)} \qquad (m=2,\ 3,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (1.77)$$

Поэтому, если рассмотрим ряд

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(m)} + \ldots, \qquad (1.78)$$

все члены которого положительны, то для всякого t в промежутке от t_0-T до t_0+T будем иметь

$$\{x_s^{(1)}\} < x^{(1)},\quad \{x_s^{(2)}\} < x^{(2)},\ \ldots,\ \{x_s^{(m)}\} < x^{(m)},\ \ldots,$$

и из сходимости ряда (1.78) будет следовать абсолютная сходимость каждого из рядов (1.74) для всякого t в промежутке $(t_0-T,\ t_0+T)$. Таким образом, вопрос приводится к исследованию сходимости ряда (1.78). Для этого А. М. Ляпунов составляет алгебраическое уравнение, решение которого дает этот ряд.

Чтобы получить это уравнение, положим

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x^{(m)},$$

что с помощью (1.77) приводится к виду

$$x = (1 + nK)a + 2T(1 + nK)(1 + nK') \sum_{m=2}^{\infty} R^{(m)}. \qquad (1.79)$$

Но, согласно условиям теоремы и неравенствам Коши, для $P^{(m_1, \ldots, m_n)}$ можно взять величины $M \cdot A^{-(m_1 + \ldots + m_n)}$, где M — некоторый общий высший предел для всех функций M_s, а A — некоторый положительный низший предел, общий для всех функций A_s (в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$).

А тогда, как легко убедиться, функция

$$\hat{X} = M\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{A}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A}\right)\ldots\left(1 - \frac{x_n}{A}\right)} - 1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A}\right\}$$

будет усиливающей для каждой из $\bar{X}_s$. Поэтому, если в выражении для $\hat{X}$ каждое x_s заменить рядом, сумму которого мы обозначили через x, то при сделанном выборе величин $P^{(m_1, \ldots, m_n)}$ величина $R^{(m)}$ представит совокупность членов m-го измерения относительно значков величин $x^{(\mu)}$ в разложении выражения для $\hat{X}$ после упомянутой замены.

А так как сумма $\sum_{m=2}^{\infty} R^{(m)}$ представляет, очевидно, совокупность всех членов упомянутого разложения, то будем иметь

$$\sum_{m=2}^{\infty} R^{(m)} = M\left\{\left(1 - \frac{1}{A}\sum_{\mu=1}^{\infty} x^{(\mu)}\right)^{-n} - 1 - \frac{n}{A}\sum_{\mu=1}^{\infty} x^{(\mu)}\right\},$$

что после подстановки в (1.79) и замены $\sum x^{(\mu)}$ на x приведет к следующему уравнению:

$$x = (1 + nK)a + Ah\left\{\left(1 - \frac{x}{A}\right)^{-n} - 1 - n\frac{x}{A}\right\}, \qquad (1.80)$$

где

$$h = \frac{2MT}{A}(1 + nK)(1 + nK').$$

Поэтому ряд (1.78), формально удовлетворяющий уравнению (1.80), представит разложение по целым положительным степеням a того корня этого уравнения, который обращается в нуль вместе с a. Уравнение (1.80), или

$$F(a, x) = x - (1 + nK)a - Ah\left\{\left(1 - \frac{x}{A}\right)^{-n} - 1 - \frac{x}{A}\right\} = 0, \qquad (1.80')$$

принадлежит к типу, рассмотренному в § 2, причем $F(a, x)$ есть голоморфная функция при любом a и $x < A$, обращающаяся в нуль при $a = x = 0$. Так как $F'_x(0, 0) = 1$, то по теореме 1 § 2 это уравнение имеет единственный корень, стремящийся к нулю вместе с a. Этот корень есть голоморфная функция от a, представляющаяся абсолютно сходящимся рядом, пока a не превышает известного предела.

В силу единственности разложения упомянутый ряд совпадает с рядом (1.78), и нам остается только найти область сходимости этого разложения *).

Рассмотрим для этого всевозможные (вообще говоря, комплексные) значения a и x, удовлетворяющие двум уравнениям $F(a, x) = 0$, $F'_x(a, x) = 0$. Если g — наименьший из модулей всех значений a, удовлетворяющих этим уравнениям, то x будет аналитической функцией от a при $|a| < g$, а следовательно, ряд (1.78) будет сходиться абсолютно при этом же условии. Составляя уравнение $F'_x(a, x) = 0$ и исключая затем x из двух уравнений $F(a, x) = 0$ и $F'_x(a, x) = 0$, мы получим единственное значение a, которое и обозначим через g, определяемое формулой

$$g = \frac{A}{1 + nK}\left\{1 - (n+1)h\left[\left(\frac{1}{nh} + 1\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1\right]\right\}. \tag{1.81}$$

Этот предел g есть, очевидно, функция от T, неограниченно убывающая при бесконечном возрастании T, так как из (1.81) прямо следует (после соответствующего раскрытия неопределенности), что $\lim\limits_{T\to\infty} g = 0$.

Ряд (1.78) будет сходиться и при $a = g$, так как обладает положительными коэффициентами, а для корня x уравнения (1.80), несомненно, существует предел, когда a стремится к g.

А отсюда следует, что все ряды (1.74) сходятся абсолютно при всяком t, лежащем между $t_0 - T$ и $t_0 + T$, если $|a_s| \leqslant g$.

Найденный предел g при $T = 0$ принимает значение величины $A/(1 + nK)$, соответствующее тому же T. А значение это, согласно замеченному выше относительно величины K, можно считать равным соответствующему значению величины A, если функции $x_{s\sigma}$ таковы, что $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, так как при последнем условии за K можно взять такую функцию T, которая обращается в нуль при $T = 0$.

Но тогда $a_s = x_s^{(0)}$, и поэтому мы можем утверждать, что если все A_s — непрерывные функции t и если A_0 — наименьшее из значений, принимаемых ими для $t = t_0$, то при всяких $x_s^{(0)}$, удо-

*) Теорема 1 § 2 не дает возможности определить область сходимости, так как ряд для $F(a, x)$ здесь сходится при любом a, откуда следует только, что радиус сходимости ряда конечен.

влетворяющих условиям $|x_s^{(0)}| < A_0$, найдется такое число $T \neq 0$, что функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (1.67) и принимающие значения $x_s^{(0)}$ при $t = t_0$, представятся абсолютно сходящимися рядами, расположенными по степеням $x_s^{(0)}$, для всякого t в промежутке $(t_0 - T, t_0 + T)$.

Таким образом, теорема А. М. Ляпунова доказана полностью.

3. Из теоремы А. М. Ляпунова, рассмотренной в предыдущем разделе, вытекает, как частный случай, одна теорема Пуанкаре, доказанная знаменитым французским ученым независимо от Ляпунова и являющаяся основой широко известного «метода малого параметра».

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s(t \mid z_\sigma \mid \mu_j) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.82}$$

правые части которых суть данные функции времени t, величин z_s, являющихся неизвестными функциями, и ν параметров μ_i. Допустим, что при некоторых частных значениях $\mu_i^{(0)}$ этих параметров мы умеем интегрировать систему (1.82) или, по крайней мере, можем найти некоторое ее частное решение

$$z_s = f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.83}$$

так что имеем тождественно

$$\frac{df_s(t)}{dt} \equiv Z_s(t \mid f_\sigma(t) \mid \mu_j^{(0)}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.82'}$$

Задача, поставленная А. Пуанкаре, заключается в нахождении решений системы (1.82), близких к решению (1.83) и обращающихся в него при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Введем в уравнения (1.82) неизвестные x_s подстановкой

$$x_s = z_s - f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.84}$$

и положим, сверх того,

$$x_{k+i} = \mu_i - \mu_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{1.84'}$$

Рассматривая x_{k+i} так же как неизвестные функции (что, очевидно, возможно), и обозначая $k + \nu$ через n, мы получим следующую систему n уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.85}$$

где для $s = 1, 2, \ldots, k$ функции X_s определяются формулами

$$X_s = Z_s(t \mid x_\sigma + f_\sigma(t) \mid x_{k+j} + \mu_j^{(0)}) - Z_s(t \mid f_\sigma(t) \mid \mu_j^{(0)}), \tag{1.86}$$

а для $s=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+\nu$:

$$X_s \equiv 0. \tag{1.86'}$$

Поэтому функции X_s уничтожаются для всякого t при одновременном равенстве нулю всех x_s $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и уравнения (1.85) имеют нормальный вид (1.67).

Допустим теперь, что исходные уравнения (1.82) и решение (1.83) таковы, что функции X_s $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ оказываются для всякого t голоморфными функциями величин x_s $(s=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots, n)$ в области $|x_s| \leqslant A_s$ и удовлетворяют, сверх того, всем прочим условиям теоремы А. М. Ляпунова, рассмотренной в предыдущем разделе.

Тогда мы можем утверждать, что решение системы (1.85) представится рядами, расположенными по степеням начальных значений $x_s^{(0)}$ и абсолютно сходящимися для всякого t в промежутке $(t_0-T,\ t_0+T)$ при $|x_s^{(0)}| < g(T)$.

Ряды эти будут иметь следующий вид:

$$x_s = \sum_{m=1}^{\infty} x_s^{(m)}\left(t \,|\, x_\sigma^{(0)}\right) \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1.87}$$

где

$$x_s^{(m)}\left(t \,|\, x_\sigma^{(0)}\right) = \sum P_s^{(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n)}(t)\left(x_1^{(0)}\right)^{m_1}\left(x_2^{(0)}\right)^{m_2} \ldots \left(x_n^{(0)}\right)^{m_n} \tag{1.87'}$$

есть форма степени m от величин $x_s^{(0)}$, коэффициенты которой суть непрерывные функции времени.

Возвращаясь теперь к уравнениям (1.82), мы получим уже без всяких затруднений их решение при μ_i, не равных $\mu_i^{(0)}$, но достаточно близких к ним численно, и обращающееся в решение (1.83) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu)$.

Действительно, для $s=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+\nu$ мы имеем, очевидно, $x_{k+i} = x_{k+i}^{(0)} = \mu_i - \mu_i^{(0)}$, а для $s=1,\ 2,\ \ldots,\ k$:

$$z_s = f_s(t) + x_s,$$

причем по формулам (1.84), $x_s^{(0)} = z_s^{(0)} - f_s(t_0)$.

Поэтому ряды (1.87) для $s=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ прямо дадут нам разложения функций z_s, удовлетворяющих уравнениям (1.82) с начальными условиями $z_s^{(0)}$. Ряды эти располагаются по степеням разностей

$$\left.\begin{array}{ll} z_s^{(0)} - f_s(t_0) & (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \\ \mu_i - \mu_i^{(0)} & (i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu) \end{array}\right\} \tag{1.88}$$

и сходятся абсолютно для всякого t, лежащего между t_0-T и t_0+T, пока числовые значения этих разностей не превосходят некоторого предела, зависящего от T, который можно определить. Наоборот, для всякого заданного (сколь угодно большого) значения T величины (1.88) возможно выбрать настолько малыми численно, чтобы ряды (1.87) были абсолютно сходящимися в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$.

В частности, полагая в этих рядах $z_s^{(0)} = f_s(t_0)$, мы получим разложения функций z_s, удовлетворяющих уравнениям (1.82) и принимающих при $t = t_0$ значения $f_s(t_0)$.

Эти ряды напишутся в виде

$$z_s = f_s(t) + \sum P_s^{(m_1, \ldots, m_\nu)}(t)\left(\mu_1 - \mu_1^{(0)}\right)^{m_1} \ldots \left(\mu_\nu - \mu_\nu^{(0)}\right)^{m_\nu}, \quad (1.89)$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{i=1}^{\nu} m_i \geqslant 1$, а $P_s^{(m_1, \ldots, m_\nu)}(t)$ — непрерывные функции, обращающиеся в нуль при $t = t_0$.

Заметим, что если (1.83) — частное решение уравнений (1.82) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$, содержащее l $(0 \leqslant l < k)$ произвольных постоянных, то ряды (1.89) также дадут частное решение уравнений (1.82) при $\mu_i \neq \mu_i^{(0)}$ с таким же числом произвольных постоянных. Если же $l = k$, то (1.83) есть общее решение системы (1.82) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$, а (1.89) — общее решение той же системы при $\mu_i \neq \mu_i^{(0)}$.

Полагая, наоборот, в рядах (1.87) $\mu_i = \mu_i^{(0)}$, мы получим функции z_s, удовлетворяющие уравнениям (1.82) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ и принимающие при $t = t_0$ значения $z_i^{(0)} \neq f_i(t_0)$.

Непосредственно, теорема А. Пуанкаре получается из рассмотренной теоремы А. М. Ляпунова, если в системе (1.82) положить $\mu_i^{(0)} = 0$ и $\nu = 1$. Теорема эта, как следует из вышеизложенного, может быть сформулирована следующим образом:

Теорема А. Пуанкаре. *Пусть дана система уравнений*

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s(t \,|\, z_\sigma \,|\, \mu) \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \quad (1.90)$$

где правые части голоморфны при всяком $|t| \geqslant t_0$ *относительно* $z_s - f_s(t)$, μ, *модули которых достаточно малы и где* $f_s(t)$ *есть решение уравнений* (1.90) *при* $\mu = 0$. *Тогда при* $\mu \neq 0$, *но достаточно малом по модулю решение системы* (1.90) *представляется рядами вида*

$$z_s = f_s(t) + \sum_{m_1 + \ldots + m \geqslant 1} P_s^{(m_1, \ldots, m_k, m)}(t)\, \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \ldots \beta_k^{m_k} \mu^m, \quad (1.91)$$

где $\beta_s = z_s^{(0)} - f_s(t_0)$, *абсолютно сходящимися при достаточно малых* $|\beta_s|$ *и* $|\mu|$ *для всякого* t *в некотором промежутке от* $t_0 - T$ *до* $t_0 + T$, *где* T *зависит от* β_s *и* μ.

4. Уравнения (1.90) можно написать также в виде

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m Z_s^{(m)}(t \mid z_\sigma), \tag{1.90'}$$

где $Z_s^{(m)}$ — голоморфные функции величин $z_s - f_s(t)$, а $f_s(t)$ представляют решение уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s^{(0)}(t \mid z_\sigma), \tag{1.91'}$$

которые называют *порождающими* или *исходными*, или *уравнениями невозмущенного движения* *).

Решение уравнений (1.90′), «близкое» к решению исходной системы, можно также искать в виде рядов, расположенных по степеням параметра μ, т. е. в виде

$$z_s = f_s(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m z_s^{(m)}. \tag{1.92}$$

Так как по свойству рядов Тэйлора — Маклорена

$$z_s^{(m)} = \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m z_s}{d\mu^m}\right)_{\mu=0},$$

то, чтобы получить уравнения, определяющие функции $z_s^{(m)}$, нужно последовательно дифференцировать уравнения (1.90′) по параметру μ, полагая после каждого дифференцирования $\mu = 0$. В результате получим следующие системы уравнений:

$$\frac{dz_s^{(m)}}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma}(t) \cdot z_s^{(m)} + Q_s^{(m)} \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1.93}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$p_{s\sigma}(t) = \left[\frac{\partial Z_s^{(0)}}{\partial z_\sigma}\right]_0, \tag{1.93'}$$

$Q_s^{(1)} = Z_s^{(1)}(t \mid f_\sigma(t))$, а $Q_s^{(m)}$ $(m > 1)$ — целые многочлены относительно тех $z_s^{(l)}$, для которых $l < m$.

Поэтому, когда все $z_s^{(l)}$ $(l < m)$ уже определены, то $Q_s^{(m)}$ являются известными функциями времени и решение задачи

*) Слово движение здесь нужно понимать в обобщенном смысле, как процесс изменения в зависимости от времени совокупности величин $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_k$.

приводится опять к интегрированию ряда систем линейных неоднородных уравнений.

Это интегрирование, как мы знаем, приводится к квадратурам, если известна какая-либо система k независимых решений системы однородных уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma}(t)\, z_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.94}$$

названных Пуанкаре *уравнениями в вариациях*. В разделе 1 § 3 было показано, что функции $z_{s\sigma}$, составляющие интегральную матрицу системы (1.94), всегда могут быть определены по методу А. М. Ляпунова при помощи абсолютно сходящихся рядов. Однако если функции $f_s(t)$ представляют общее решение системы (1.91′), то все функции $z_{s\sigma}$ могут быть найдены без всякого труда при помощи простых дифференцирований. Действительно, докажем следующую теорему, принадлежащую Пуанкаре.

Теорема Пуанкаре об уравнениях в вариациях. *Если функции $f_s(t|C_j)$, где $C_1, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные, представляют общее решение исходных уравнений* (1.91′), *то функции*

$$\frac{\partial f_s(t \mid C_j)}{\partial C_\sigma} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, k; \\ \sigma = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix} \tag{1.94′}$$

образуют систему k независимых решений уравнений в вариациях (1.94).

Доказательство теоремы очень просто. Действительно, если функции $f_s(t|C_j)$ составляют решение системы (1.91′), то мы имеем следующие тождества:

$$\frac{df_s(t \mid C_j)}{dt} = Z_s^{(0)}(t \mid f_j(t \mid C_l)),$$

каковы бы ни были значения произвольных постоянных C_j.

Дифференцируя эти тождества по любой из величин C_σ, мы получим, очевидно, опять тождества

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f_s(t \mid C_j)}{\partial C_\sigma}\right] \equiv \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial Z_s^{(0)}}{\partial f_r} \cdot \frac{\partial f_r(t \mid C_l)}{\partial C_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k),$$

которые в силу формул (1.93) приводятся к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f_s}{\partial C_\sigma} \equiv \sum_{r=1}^{k} p_{sr}(t) \cdot \frac{\partial f_r}{\partial C_\sigma}.$$

Отсюда следует, что функции (1.94′) для каждого σ удовлетворяют системе (1.94). Остается показать, что функции (1.94′) образуют систему независимых решений. Но мы имеем

$$\Delta = \left\| \frac{\partial f_s(t \mid C_j)}{\partial C_\sigma} \right\| = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_k)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_k)},$$

а так как по условию $f_s(t \mid C_j)$ есть общее решение уравнений (1.91′), то якобиан этих функций заведомо отличен от нуля, и следовательно, теорема Пуанкаре доказана полностью.

Если функции $f_s(t)$ представляют частное решение уравнений невозмущенного движения, то только что доказанная теорема Пуанкаре, разумеется, неприменима и приходится прибегать к методу Ляпунова или интегрировать уравнения в вариациях каким-нибудь другим способом.

Напомним, что по способу А. М. Ляпунова можно также найти частное решение любой из систем (1.93).

Примечание. Метод определения коэффициентов рядов (1.92) может быть применен также и к рядам (1.91), (1.89), (1.87), так что интегрирование нелинейных уравнений с помощью рядов, расположенных по степеням параметров и произвольных постоянных, всегда приводится к интегрированию систем линейных уравнений, из которых находятся коэффициенты упомянутых рядов. Теорема Пуанкаре об уравнениях в вариациях также применима к подобным системам линейных неоднородных уравнений.

Глава II
УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

В этой главе мы изложим основные сведения из общей теории устойчивости движения, созданной А. М. Ляпуновым, являющейся необходимым аппаратом аналитико-качественных методов и имеющей поэтому исключительно важное значение для современной небесной механики.

§ 1. Постановка задачи и определения

1. Рассмотрим сначала нормальную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.1}$$

где функции $X_s(t|x_\sigma)$ непрерывны и однозначны для значений аргументов, удовлетворяющих условиям вида

$$|t| \geqslant t_0, \qquad |x_s| \leqslant A_s, \tag{2.1'}$$

и обладают непрерывными и однозначными частными производными по крайней мере первого порядка в области (2.1′).

Пусть, кроме того, все функции X_s при любом t обращаются в нуль в начале координат. Тогда уравнения (2.1) имеют частное решение

$$x_s = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.2}$$

которое мы будем называть *нулевым решением* или, следуя Ляпунову, *невозмущенным движением.*

Допустим, что функции X_s удовлетворяют всем условиям теоремы Ляпунова, рассмотренной в § 4 главы 1.

Тогда, как следует из этой теоремы, мы можем утверждать, что всякому положительному числу $\varepsilon < A$ и всякому положительному T соответствует такое число λ, з а в и с я щ е е о т ε и T $(0 < \lambda \leqslant \varepsilon)$, что при всяких начальных условиях $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|x_s^{(0)}\right| \leqslant \lambda \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.3}$$

мы будем иметь неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3'}$$

справедливые для всякого значения t, заключающегося в промежутке от $t_0 - T$ до $t_0 + T$.

При этом функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (2.1), представляются рядами, расположенными по степеням начальных значений $x_s^{(0)}$, абсолютно сходящимися при всяком t в области $(t_0 - T,\ t_0 + T)$ и при всяких $x_s^{(0)}$, выполняющих неравенства (2.3).

Эти ряды определяют бесчисленное множество решений тех же уравнений (2.1), близких к нулевому решению с точностью до заданного ε в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$.

Мы можем также сказать, что нулевое решение (2.2) аппроксимирует в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$ любое решение системы (2.1), для которого $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda(\varepsilon, T)$.

Упомянутые ряды допускают вообще аналитические продолжения и за пределы промежутка их сходимости, но тогда мы не можем гарантировать, что неравенства (2.3′) будут оставаться постоянно выполненными при всяких $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих неравенствам (2.3).

Иными словами, вообще говоря, из множества решений системы (2.1), выходящих в начальный момент из достаточно малой окрестности начала координат, только некоторые будут оставаться в области, определяемой неравенствами (2.3′) при всяком t (или только при значениях t, удовлетворяющих одному из условий: $t \geqslant t_0$, $t \leqslant t_0$).

Другие же решения, выходящие даже из сколь угодно малой окрестности начала, будут покидать область (2.3′) при некотором конечном значении t.

Однако может случиться, что число λ окажется не зависящим от T и что при выполнении неравенств (2.3) неравенства (2.3′) будут выполняться для всякого t или, во всяком случае, для значений t, удовлетворяющих одному из условий: $t \geqslant t_0$, $t \leqslant t_0$.

Тогда нулевое решение (2.2) будет аппроксимировать любое решение системы (2.1), для которого $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda(\varepsilon)$ в сколь угодно большом промежутке времени, расположенном по крайней мере по одну сторону от начального момента t_0.

В этом случае нулевое решение, или невозмущенное движение, мы будем называть *устойчивым* (в смысле Ляпунова), а в противоположном случае — *неустойчивым*.

2. Сформулируем теперь точные определения понятий устойчивости и неустойчивости, предполагая, что функции X_s в уравнениях (2.1) для всякого t конечны, непрерывны и однозначны вместе со своими частными производными первого порядка при всех значениях x_s, удовлетворяющих условиям

$$|x_s| \leqslant A \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

и уничтожаются, когда все x_s равны нулю, причем A — заданная положительная постоянная.

Всякой системе начальных значений $x_s^{(0)}$ (начальные возмущения), удовлетворяющих неравенствам (2.4), будет соответствовать единственное непрерывное решение уравнений (2.1), отличное от нулевого или от невозмущенного движения, которое мы будем называть, следуя Ляпунову, *возмущенным движением.*

Определение понятия *устойчивость* сформулируем следующим образом:

Невозмущенное движение называется устойчивым, если всякому, произвольно задаваемому положительному числу $\varepsilon \leqslant A$ *соответствует такое положительное число* $\lambda < \varepsilon$, *что при всяких начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям*

$$\left|x_s^{(0)}\right| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будут выполняться для всякого значения $t \geqslant t_0$.

Частным, но важным для приложений случаем понятия устойчивости является *асимптотическая устойчивость*, когда невозмущенное движение, удовлетворяя предыдущему определению, вдобавок таково, что при всяких, численно не превышающих известного предела, начальных возмущениях все функции x_s приближаются к нулю, когда t беспредельно растет, т. е. когда $\lim\limits_{t \to \infty} x_s(t) = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$.

Можно сформулировать и отдельное определение асимптотической устойчивости следующим образом:

Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если всякой паре положительных чисел λ *и* ε, *задаваемых произвольно, независимо друг от друга, но подчиненных условиям* $\varepsilon < \lambda \leqslant A$, *соответствует такое число* $\tau > t_0$, *что при любых* $x_s^{(0)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\left|x_s^{(0)}\right| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будут выполняться по крайней мере для всех значений $t > \tau$.

Ясно, что если невозмущенное движение удовлетворяет последнему определению, то оно заведомо удовлетворяет и первому. Обратное, разумеется, утверждать нельзя.

Переходя к понятию неустойчивости, заметим, что оно прямо противоположно понятию устойчивости, так что всякое невозмущенное движение, не являющееся устойчивым (т. е. не удовлетворяющее определению устойчивости), является неустойчивым.

Однако полезно сформулировать и независимое определение понятия неустойчивости, что можно сделать следующим образом:

Невозмущенное движение называется неустойчивым, если всякой паре положительных чисел λ *и* ε, *задаваемых произвольно, независимо друг от друга, но подчиненных условиям* $\lambda < \varepsilon \leqslant A$, *соответствует такое число* $\tau > t_0$, *что всегда можно найти вещественные значения* $x_s^{(0)}$, *удовлетворяющие условиям*

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и приводящие при $t = \tau$ *по крайней мере к одному из равенств*

$$|x_s(\tau)| = \varepsilon.$$

Таким образом, для того чтобы невозмущенное движение было неустойчивым, д о с т а т о ч н о, чтобы нашлась х о т я б ы о д н а система значений $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих условиям $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, приводящая хотя бы к одному из равенств $|x_s(\tau)| = \varepsilon$.

Может случиться, что всякая система начальных возмущений $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$ приводит к равенствам $|x_s(\tau)| = \varepsilon$.

В этом случае мы будем говорить, что невозмущенное движение *абсолютно неустойчиво.*

Заметим еще, что из определения неустойчивости следует, что, задавая числа λ и ε, мы можем найти такое $\tau > t_0$, что п р и л ю б ы х $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$ неравенства $|x_s(t)| < \varepsilon$ будут выполняться для всякого t в промежутке (t_0, τ).

Дадим еще определение понятия *условной устойчивости*:

Невозмущенное движение называется условно устойчивым, если всякому $\varepsilon > 0$ *соответствует такое* $0 < \lambda < \varepsilon$, *что при всех* $x_s^{(0)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda, \qquad f(x_\sigma^{(0)}) \geqslant 0,$$

где f — *функция начальных возмущений, обращающаяся в нуль, когда все* $x_s^{(0)}$ *равны нулю, неравенства*

$$|x_s(t)| < \varepsilon$$

будут выполняться для всякого значения $t \geqslant t_0$.

Очевидно, что определение условной устойчивости есть не что иное, как иначе сформулированное определение неустойчивости (но не абсолютной неустойчивости).

Примечание. В приведенных определениях рассматриваются значения t только бóльшие начального значения t_0, что устанавливает свойство движения (решений системы (2.1)) на будущее. Но точно так же можно рассматривать задачу об устойчивости в прошлом, для чего во всех определениях достаточно заменить неравенство $t \geqslant t_0$ на неравенство $t \leqslant t_0$.

При этом может оказаться, что обнаруженное при $t \geqslant t_0$ свойство невозмущенного движения изменится на другое, даже на противоположное, при $t \leqslant t_0$, т. е., например, устойчивость в будущем может превратиться в неустойчивость в прошлом или наоборот. Может также случиться, что невозмущенное движение обладает одним и тем же свойством и при $t \geqslant t_0$, и при $t \leqslant t_0$.

Можно заметить также, что решение задачи об устойчивости в прошлом можно свести к решению задачи об устойчивости в будущем, просто изменяя в уравнениях (2.1) t на $-t$.

Заметим еще, что может случиться (и это будет наиболее общий случай), что функции $X_s(t|x_\sigma)$ даны только для значений t, заключенных в некотором промежутке $(t_0, \bar{t})$, за пределами которого рассматривать задачу по каким-либо причинам не имеет смысла. Тогда приведенные определения устойчивости и неустойчивости в смысле А. М. Ляпунова могут быть сохранены с заменой слов «...для всех значений $t \geqslant t_0$ ...» на следующие: «...для всех значений t в промежутке $(t_0, \bar{t})$...». При этом, если невозмущенное движение оказывается неустойчивым, то это означает, что величина τ, играющая роль в определении неустойчивости, такова, что $\tau \leqslant \bar{t}$. Таким образом, невозмущенное движение неустойчиво, если последующие возмущения не способны оставаться численно меньшими назначенного предела в течение всего того промежутка времени, когда имеет смысл рассматривать данное движение.

3. Для пояснения данных нами основных определений рассмотрим некоторые простые примеры. Так как мы не имеем еще способа для решения задачи об устойчивости в общих случаях, то эти примеры выбраны из области тех задач, когда заданные дифференциальные уравнения могут быть полностью проинтегрированы.

Пример 1. Пусть уравнения возмущенного движения приведены к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = +\alpha x,$$

где α — положительная постоянная. Правые части этих уравнений не зависят от t и, очевидно, голоморфны для всех вещественных значений x и y. Поэтому постоянная A, входящая в определение устойчивости, здесь может быть взята произвольно.

Общее решение предложенных уравнений напишется в виде

$$x = x_0 \cos\alpha(t - t_0) - y_0 \sin\alpha(t - t_0),$$
$$y = x_0 \sin\alpha(t - t_0) + y_0 \cos\alpha(t - t_0),$$

где x_0, y_0 — начальные значения (начальные возмущения), соответствующие начальному моменту t_0.

Из общего решения получаем первый интеграл системы:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Поэтому, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, полагая $\lambda = \varepsilon$, мы будем иметь при любых x_0, y_0, удовлетворяющих условию

$$x_0^2 + y_0^2 \leqslant \lambda^2$$

или, что то же, условиям

$$|x_0| \leqslant \lambda, \quad |y_0| \leqslant \lambda,$$

справедливые для всякого значения t неравенства

$$x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

откуда также

$$|x| \leqslant \varepsilon, \quad |y| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, невозмущенное движение, т. е. нулевое решение

$$x = 0, \quad y = 0$$

предложенных уравнений у с т о й ч и в о. (Заметим еще, что здесь $T = t_0$.)

Если уравнения возмущенного двужения даны в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\psi(t)\,y, \quad \frac{dy}{dt} = +\alpha\psi(t)\,x,$$

где $\psi(t)$ есть непрерывная функция времени, принимающая с некоторого момента T только неотрицательные значения, и притом такая, что интеграл

$$\int_T^t \psi(t)\,dt$$

расходится при $t \to \infty$, то, вводя вместо t новую независимую переменную θ подстановкой

$$d\theta = \psi(t)\,dt,$$

мы приведем наши уравнения к первоначальному виду, а так как θ неограниченно растет вместе с t и, следовательно, может играть такую же роль, как и t, то заключим, что решение $x=0$, $y=0$ данных уравнений также устойчиво.

Пример 2. Пусть уравнения возмущенного движения даны в виде

$$\frac{dx}{dt} = -x - y + (x - y)(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = +x - y + (x + y)(x^2 + y^2).$$

Общее решение этих уравнений можно представить в форме

$$x = \frac{x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta}{\sqrt{r_0^2 + \left(1 - r_0^2\right) e^{2(t-t_0)}}}, \quad y = \frac{x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta}{\sqrt{r_0^2 + \left(1 - r_0^2\right) e^{2(t-t_0)}}},$$

где x_0, y_0 — начальные возмущения, соответствующие начальному моменту t_0, $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, а θ определяется формулой

$$\theta = 2(t - t_0) - \frac{1}{2}\ln\left[r_0^2 + \left(1 - r_0^2\right) e^{2(t-t_0)}\right].$$

Но из этих формул находим также

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{r_0^2}{r_0^2 + \left(1 - r_0^2\right) e^{2(t-t_0)}},$$

откуда видим, что при любых x_0, y_0, удовлетворяющих условию

$$x_0^2 + y_0^2 < 1,$$

x, y и r при неограниченно возрастающем t приближаются к нулю. Следовательно, нулевое решение предложенных уравнений устойчиво асимптотически.

Пример 3. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = +n(t)\,y + m(t)\,x(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -n(t)\,x + m(t)\,y(x^2 + y^2),$$

где $n(t)$ и $m(t)$ — непрерывные функции времени для $t > t_0$ или вообще для $t > T$.

Общее решение этих уравнений, как легко проверить, может быть написано в виде

$$x = \frac{x_0 \cos\left[\int_T^t n(t)\,dt\right] + y_0 \sin\left[\int_T^t n(t)\,dt\right]}{\sqrt{1 - 2\left(x_0^2 + y_0^2\right)\int_T^t m(t)\,dt}},$$

$$y = \frac{y_0 \cos\left[\int_T^t n(t)\,dt\right] - x_0 \sin\left[\int_T^t n(t)\,dt\right]}{\sqrt{1 - 2\left(x_0^2 + y_0^2\right)\int_T^t m(t)\,dt}},$$

откуда выводим

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{r_0^2}{1 - 2r_0^2\int_T^t m(t)\,dt}.$$

Рассматривая эти формулы, сейчас же убеждаемся, что невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ устойчиво, если $m(t) < 0$, при $t > T$.

Если же $m(t) > 0$, то невозмущенное движение устойчиво, когда интеграл

$$\int_T^t m(t)\,dt$$

сходится при $t \to \infty$, и неустойчиво, когда этот интеграл расходится при $t \to \infty$.

Заметим, что если при $t > T$ функция $m(t)$ получает только неположительные значения и указанный интеграл сходится при $t \to \infty$, то невозмущенное движение просто устойчиво (не асимптотически), так как из выражения для r^2 видно, что в этом случае $\lim\limits_{t \to \infty} r \neq 0$, но так как r не возрастающая функция, то при

$$x_0^2 + y_0^2 < \varepsilon^2,$$

где ε — любое заданное число, мы будем для всякого $t > T$ иметь $r^2 < \varepsilon^2$.

Если же этот интеграл расходится при $t \to \infty$, то при любых x_0, y_0 мы будем иметь $\lim\limits_{t \to \infty} r = 0$ и невозмущенное движение окажется асимптотически устойчивым.

4. Рассмотрим теперь задачу об устойчивости реального движения какой-либо механической системы без неинтегрируемых дифференциальных связей и с конечным числом степеней свободы. Пусть k — число степеней свободы, т. е. число независимых обобщенных координат q_s, определяющих положение системы. Во всякой динамической задаче (например, в любой задаче небесной механики), в которой заданы действующие на систему силы, величины q_s, рассматриваемые как функции времени t, будут удовлетворять k дифференциальным уравнениям второго порядка. Эти уравнения в самом общем виде можно написать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=U_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{2.5}$$

где T обозначает живую силу рассматриваемой механической системы, а U_s — обобщенные силы, зависящие вообще от t, q_σ, $\dot{q}_\sigma$.

Уравнения (2.5) — уравнения Лагранжа 2-го рода — всегда можно разрешить относительно вторых производных от q_s, что позволяет написать уравнения движения (2.5) в виде

$$\ddot{q}_s=Q_s(t\,|\,q_\sigma\,|\,\dot{q}_\sigma). \tag{2.5'}$$

Систему (2.5′) в свою очередь можно заменить, равносильной ей системой уравнений первого порядка, которые можно выбрать вообще различными способами, например в виде

$$\frac{dq_s}{dt}=\dot{q}_s, \qquad \frac{d\dot{q}_s}{dt}=Q_s(t\,|\,q_\sigma\,|\,\dot{q}_\sigma). \tag{2.5''}$$

Может случиться, что в интересующей нас задаче действующие силы обладают силовой функцией $U(t|q_\sigma)$. Тогда система (2.5) может быть написана в канонической форме:

$$\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_s}, \tag{2.5'''}$$

где

$$p_s=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, \qquad H=T_2-T_0-U.$$

В выражении характеристической функции T_2 обозначает совокупность членов второй степени относительно p_s, а T_0 зависит только от t и q_s.

Итак, пусть даны уравнения движения некоторой материальной системы, например в виде (2.5″). Всякой заданной системе допустимых в рассматриваемой задаче начальных значений $q_s^{(0)}$, $\dot{q}_s^{(0)}$ соответствует некоторое вполне определенное движение этой материальной системы. Различным совокупностям начальных значений будут соответствовать различные движения нашей системы, возможные для нее при тех же самых заданных силах.

Выберем из всех возможных движений нашей системы какое-нибудь одно, вполне определенное для всякого значения $t \geqslant t_0$ движение, которое условимся называть *невозмущенным*.

Этому невозмущенному движению соответствуют вполне определенные значения начальных данных и вполне определенное частное решение дифференциальных уравнений (2.5″).

Пусть $\bar{q}_s^{(0)}$, $\bar{\dot{q}}_s^{(0)}$ — начальные данные невозмущенного движения, представляющие заданные вещественные числа, а соответствующее частное решение уравнений (2.5″) запишем в виде

$$q_s = \varphi_s(t), \qquad \dot{q}_s = \dot{\varphi}_s(t), \tag{2.6}$$

где φ_s, $\dot{\varphi}_s$ — вещественные функции времени, дающие при всяком $t \geqslant t_0$ только допустимые значения для величин q_s, $\dot{q}_s$.

Эти функции таковы, что для всякого $t \geqslant t_0$ выполняются тождества

$$\frac{d\varphi_s}{dt} \equiv \dot{\varphi}_s, \qquad \frac{d\dot{\varphi}_s}{dt} \equiv Q_s(t \mid \varphi_\sigma \mid \dot{\varphi}_\sigma),$$

а для $t = t_0$ имеем $\varphi_s(t_0) = \bar{q}_s^{(0)}$, $\dot{\varphi}_s(t_0) = \bar{\dot{q}}_s^{(0)}$.

Всякой другой системе начальных данных, отличных от $\bar{q}_s^{(0)}$, $\bar{\dot{q}}_s^{(0)}$, соответствует некоторое другое движение нашей механической системы, отличное от невозмущенного и определяемое другим решением той же самой системы (2.5″).

Любое другое движение, отличное от невозмущенного, мы будем называть, следуя А. М. Ляпунову, *возмущенным движением*.

Начальные данные возмущенного движения представим в виде

$$q_s^{(0)} = \bar{q}_s^{(0)} + \varepsilon_s, \qquad \dot{q}_s^{(0)} = \bar{\dot{q}}^{(0)} + \varepsilon'_s \qquad (s = 1, \ldots, k), \tag{2.7}$$

где ε_s, ε'_s — некоторые вещественные постоянные, которые естественно назвать *начальными возмущениями*.

Заданием этих величин определится некоторое возмущенное движение, так что q_s и $\dot{q}_s$, удовлетворяющие уравнениям (2.5″), будут некоторыми функциями времени и начальных возмущений. Мы будем предполагать, что величинам ε_s, ε'_s можно приписывать всякие, по крайней мере достаточно малые численно, значения.

Разности $q_s - \varphi_s(t)$, $\dot{q}_s - \dot{\varphi}_s(t)$ для всякого t будем называть *последующими возмущениями* или просто *возмущениями* обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Очевидно, что эти разности будут функциями времени и начальных возмущений ε_s, ε'_s, обращающимися в нуль (для всякого t) при $\varepsilon_s = \varepsilon'_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$.

Если же ε_s, ε'_s не нули, то возникает вопрос, можно ли назначить такие достаточно малые пределы для последующих возмущений, которых последние никогда не превзошли бы по числовым значениям?

Этот вопрос и составляет предмет теории устойчивости в смысле Ляпунова, который рассматривается в данной главе.

Поставим задачу об устойчивости сразу более общим образом.

Пусть нам заданы некоторые непрерывные, вещественные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$\Phi_s = \Phi_s(t \mid q_\sigma \mid \dot{q}_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.8}$$

причем число n этих функций может быть любым.

В невозмущенном движении величины Φ_s будут некоторыми, известными функциями времени, которые обозначим соответственно через $\Phi_s^{(0)}$, т. е. положим

$$\Phi_s^{(0)} = \Phi_s(t \mid \varphi_\sigma(t) \mid \dot{\varphi}_\sigma(t)), \tag{2.8$'$}$$

а для какого-либо возмущенного движения Φ_s будут, очевидно, некоторыми функциями величин t, ε_s, ε'_s.

Когда все ε_s, ε'_s равны нулю, то равны также нулю и все разности $\Phi_s - \Phi_s^{(0)}$, и притом для всякого t.

Так же как и выше, поставим вопрос, *можно ли назначить такие достаточно малые пределы для величин* $|\Phi_s - \Phi_s^{(0)}|$, *которых последние никогда не превзошли бы, если все* ε_s, ε'_s *предполагаются достаточно малыми численно*?

Решение этого вопроса зависит не только от характера рассматриваемого невозмущенного движения, но и от выбора функций Φ_s и составляет общую задачу об устойчивости движения относительно величин $\Phi_s(t \mid q_\sigma \mid \dot{q}_\sigma)$ *).

Если взять $n = 2k$ и положить $\Phi_i = q_i$, $\Phi_{k+i} = \dot{q}_i$, то мы получим задачу об устойчивости относительно обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Самое общее определение понятия устойчивости может быть сформулировано следующим образом:

---

*) Мы уже отмечали, что в таком случае говорят об устойчивости в смысле Ляпунова. В дальнейшем речь будет идти только о такого рода устойчивости. Впрочем, все другие разновидности понятия устойчивости обычно можно свести к понятию ляпуновской устойчивости.

Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к величинам $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, *если, задавая произвольно положительные числа* $L_1, L_2, \ldots, L_n$, *мы можем определить при всяких* L_s, *как бы малы они ни были, такие положительные числа* $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_1', E_2', \ldots, E_k'$, *чтобы при всяких вещественных значениях* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_k'$, *удовлетворяющих условиям*

$$|\varepsilon_s| \leqslant E_s, \quad |\varepsilon_s'| \leqslant E_s' \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

и при всяком t, *превосходящем* t_0, *выполнялись неравенства*

$$|\Phi_1 - \Phi_1^{(0)}| < L_1, \quad |\Phi_2 - \Phi_2^{(0)}| < L_2, \ldots, |\Phi_n - \Phi_n^{(0)}| < L_n.$$

Замечание. Прежде всего еще раз отметим, что решение вопроса об устойчивости заданного невозмущенного движения зависит, и весьма существенно, от рода величин Φ_s, по отношению к которым желательно поставить задачу об устойчивости.

Одно и то же невозмущенное движение одной и той же механической системы, при тех же самых заданных силах, может оказаться устойчивым по отношению к некоторой заданной системе величин Φ_s и может оказаться неустойчивым по отношению к некоторой другой системе этих величин. *Поэтому, говоря об устойчивости какого-либо движения, обязательно нужно указывать, по отношению к каким величинам ставится задача об устойчивости.*

Однако ясно также, что не всякая система величин Φ_s представит интерес для данной динамической задачи (в частности, для задач небесной механики), так как имеет смысл рассматривать только такие функции Φ_s, числовые значения которых прямо или косвенно могут быть выведены из наблюдений, измерений и вычислений. Другое замечание касается пределов, входящих в определение устойчивости. Из определения следует, что пределы L_s можно выбирать произвольно, однако нужно иметь в виду, что этот произвол диктуется характером и условиями задачи и указанные пределы часто определяются практическими требованиями. Что же касается чисел E_i и E_i', которых не должны превосходить числовые величины начальных возмущений, то они зависят от назначенных пределов L_s.

5. Поставленную общую задачу об устойчивости невозмущенного движения относительно заданных величин Φ_s можно привести к единообразной математической задаче об устойчивости нулевого решения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка вида (2.1) относительно величин x_s.

Допустим, что заданные функции $\Phi_s(t|q_\sigma|\dot{q}_\sigma)$ не только сами непрерывны, конечны и однозначны, но и обладают таковыми же частными производными первого порядка и что $n=2k$.

Положим теперь

$$x_s = \Phi_s - \Phi_s^{(0)} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.9}$$

так что величины x_s представляют собой возмущения величин Φ_s. Нетрудно составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти возмущения x_s. Действительно, дифференцируя равенства (2.9) по t, мы получим

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{k}\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial q_\sigma}\frac{dq_\sigma}{dt} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{d\dot{q}_\sigma}{dt}\right) - \frac{d\Phi_s^{(0)}}{dt},$$

откуда в силу уравнений (2.5″) находим

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - \frac{d\Phi_s^{(0)}}{dt} + \sum_{\sigma=1}^{k}\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{q}_\sigma}Q_\sigma\right). \tag{2.9′}$$

Правые части этих равенств выражены через t и величины q_s, $\dot{q}_s$, которые нужно исключить. Решая для этого уравнения (2.9) относительно q_s, $\dot{q}_s$, мы имеем

$$q_s = \psi_s(t|x_\sigma), \quad \dot{q}_s = \psi_s'(t|x_\sigma) \quad \begin{pmatrix} s=1,\ 2,\ \ldots,\ k \\ \sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix},$$

а подставляя теперь найденные выражения для q_s, $\dot{q}_s$ в равенства (2.9′), мы приведем их к виду

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t|x_\sigma) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.10}$$

где правые части — известные функции от t и x_s.

Нетрудно убедиться притом, что, каковы бы ни были функции Φ_s, мы всегда будем иметь тождественно

$$X_s(t|0) \equiv 0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, действительно, уравнения, которым удовлетворяют возмущения величин Φ_s, имеют вид (2.1), и эти уравнения имеют частное решение $x_s=0$, соответствующее частному решению (2.6) уравнений движения (2.5″).

Поэтому и задача об устойчивости невозмущенного движения (2.6) относительно величин Φ_s действительно приводится всегда к задаче об устойчивости нулевого решения системы (2.10). Обозначая через $x_s^{(0)}$ начальные значения возмущений (2.9), так что

$$x_s^{(0)} = \Phi_s(t|\varphi_\sigma(t_0)+\varepsilon_\sigma|\dot{\varphi}_\sigma(t_0)+\varepsilon_\sigma') - \Phi_s(t|\varphi_\sigma(t_0)|\dot{\varphi}_\sigma(t_0)), \tag{2.10′}$$

мы видим, что, по свойству функций Φ_s, всякой системе вещественных значений ε_σ, ε'_σ будет соответствовать некоторая система вещественных значений величин $x_s^{(0)}$.

Притом, как бы ни было мало данное положительное число A, величины $|x_s^{(0)}|$ всегда можно сделать меньшими A, подчиняя ε_σ, ε'_σ условию, чтобы их числовые значения не превосходили достаточно малого, но отличного от нуля предела E. Предположим теперь, обратно, что, как бы ни было мало $E > 0$, всегда можно найти такое $A > 0$, чтобы всякой системе вещественных значений $|x_s^{(0)}| < A$ соответствовала одна или несколько систем вещественных значений ε_s, ε'_s, численно меньших E.

При этом условии начальные возмущения $x_s^{(0)}$ величин x_s могут играть такую же роль при решении вопроса об устойчивости, как и величины ε_s, ε'_s, если только заданием $x_s^{(0)}$ функции x_s, удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения (2.10), определяются вполне, что мы всегда будем предполагать.

Заметим еще, что уравнения (2.10) можно получить и другим путем. Действительно, перейдем в уравнениях (2.5″) от переменных q_s, $\dot{q}_s$ к новым переменным z_i $(i = 1, 2, \ldots, n = 2k)$ посредством преобразования

$$z_i = \Phi_i(t \mid q_j \mid \dot{q}_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.11}$$

где Φ_i — те самые функции, относительно которых должна быть разрешена задача об устойчивости. Уравнения движения системы в переменных z_s будут иметь вид

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s(t \mid z_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.11′}$$

Пусть теперь нам известно некоторое частное решение системы (2.11′) $z_s = f_s(t)$, которому, очевидно, будет соответствовать некоторое частное решение системы (2.5″), т. е. некоторое движение нашей механической системы.

Тогда задача об устойчивости частного решения $f_s(t)$ уравнений (2.11′) относительно величин z_s равносильна задаче об устойчивости невозмущенного движения (2.6) относительно функций Φ_s.

Полагая теперь $x_s = z_s - f_s(t)$, мы имеем

$$\frac{dx_s}{dt} = Z_s(t \mid f_\sigma(t) + x_\sigma) - Z_s(t \mid f_\sigma(t)). \tag{2.12}$$

При помощи очевидных обозначений

$$X_s(t \mid x_\sigma) = Z_s(t \mid f_\sigma(t) + x_\sigma) - Z_s(t \mid f_\sigma(t)) \tag{2.12′}$$

эта система опять приводится к нормальному виду (2.10), причем из (2.12′) непосредственно ясно, что $X_s(t \mid 0) \equiv 0$.

Совершенно так же можно получить уравнения возмущенного движения и в том случае, когда исходные уравнения движения имеют каноническую форму.

Действительно, пусть уравнения движения имеют вид (2.5'''), и поставлена задача об устойчивости невозмущенного движения, представляемого решением $q_s = \varphi_s(t)$, $p_s = \psi_s(t)$ этой системы относительно $2k$ величин $\Phi_s(t|q_\sigma|p_\sigma)$, $\Psi_s(t|q_\sigma|p_\sigma)$.

Вводя вместо q_s, p_s новые переменные подстановкой

$$u_s = \Phi_s(t\,|\,q_\sigma\,|\,p_\sigma), \qquad v_s = \Psi_s(t\,|\,q_\sigma\,|\,p_\sigma),$$

мы получим новые уравнения движения, которые вообще не будут каноническими и запишутся в общем виде (2.11').

Но если заданные функции Φ_s, Ψ_s таковы, что

$$\sum_{\sigma=1}^{k} (p_\sigma\, dq_\sigma - v_\sigma\, du_\sigma)$$

есть полный дифференциал некоторой функции W, то преобразованные уравнения также будут каноническими, и мы имеем

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{\partial R}{\partial v_s}, \qquad \frac{dv_s}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial u_s}, \tag{2.13}$$

где $R = H + \dfrac{\partial W}{\partial t}$ есть новая характеристическая функция, которая должна быть выражена через t, u_s, v_s.

Частному решению $\varphi_s(t)$, $\psi_s(t)$ уравнений (2.5''') соответствует некоторое частное решение $f_s(t)$, $g_s(t)$ системы (2.13), и задача об устойчивости невозмущенного движения приводится к задаче об устойчивости частного решения новой системы относительно величин u_s, v_s. Полагая тогда

$$x_s = u_s - f_s(t), \quad y_s = v_s - g_s(t),$$

мы получим уравнения возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial K}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x_s}, \tag{2.13'}$$

с характеристической функцией, определяемой формулой

$$K(t\,|\,x_\sigma\,|\,y_\sigma) = R(t\,|\,f_\sigma(t) + x_\sigma\,|\,g_\sigma(t) + y_\sigma) + \\ + \sum_{\sigma=1}^{k} [x_\sigma \dot g_\sigma(t) - y_\sigma \dot f_\sigma(t)] - R(t\,|\,f_\sigma(t)\,|\,g_\sigma(t)),$$

причем, очевидно, что сама функция K и ее первые частные производные по x_s, y_s обращаются в нуль, когда все x_s, y_s равны нулю.

6. Теперь полезно рассмотреть в качестве примера важную для небесной механики задачу об устойчивости какого-либо кеплеровского движения.

Частный случай этой задачи отмечает уже на первых страницах своего знаменитого сочинения сам А. М. Ляпунов, желая подчеркнуть тот факт, что решение задачи об устойчивости зависит от выбора величин, по отношению к которым рассматривается эта задача. Приведем это место из сочинения А. М. Ляпунова полностью: «Если материальная точка, притягиваемая неподвижным центром обратно пропорционально квадрату расстояния, описывает круговую траекторию, то движение ее по отношению к радиусу-вектору, проведенному из центра притяжения, а также по отношению к ее скорости устойчиво. То же движение по отношению к прямоугольным координатам точки неустойчиво.

Если же рассматриваемая точка описывает эллиптическую траекторию, то движение ее неустойчиво не только по отношению к прямоугольным координатам, но и по отношению к радиусу-вектору и скорости. Но оно устойчиво, например, по отношению к величине

$$r - \frac{p}{1 + e\cos v},$$

где p и e — параметр и эксцентриситет эллипса, описываемого точкой в невозмущенном движении, а r и v — радиус-вектор точки в возмущенном движении и угол, составляемый им с наименьшим радиусом-вектором в невозмущенном движении».

Рассмотрим этот пример несколько более подробно.

Возьмем обычные уравнения кеплеровского движения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \dot{x}, && \frac{dy}{dt} = \dot{y}, && \frac{dz}{dt} = \dot{z},\\ &\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3}, && \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\mu y}{r^3}, && \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

общее решение которых можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} &x = r\alpha, && \dot{x} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\alpha e\sin v + \alpha'(1 + e\cos v)],\\ &y = r\beta, && \dot{y} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\beta e\sin v + \beta'(1 + e\cos v)],\\ &z = r\gamma, && \dot{z} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\gamma e\sin v + \gamma'(1 + e\cos v)], \end{aligned}\right\} \tag{2.14$'$}$$

где направляющие косинусы α, β, γ и α', β', γ' — известные функции от u, Ω, i и, кроме того,

$$u = v + \omega, \quad r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \quad t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2}. \tag{2.14$''$}$$

Произвольными постоянными общего решения (2.14′) являются кеплеровские элементы орбиты Ω, i, ω, p, e, τ, однозначно определяемые начальными значениями координат и составляющих скорости, соответствующими начальной эпохе t_0. Обозначим эти начальные значения через x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$. Предположим, что эти значения не удовлетворяют условиям

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0}=\frac{\dot{y}_0}{y_0}=\frac{\dot{z}_0}{z_0},$$

при которых $p=0$, $e=1$ и орбита есть прямая линия.

Если обозначить еще через r_0 начальный радиус-вектор и через V_0 начальную скорость, то, как известно, тип орбиты определяется знаком постоянной $h=V_0^2-\frac{2\mu}{r_0}$, так что при $h<0$ орбита есть эллипс, при $h>0$ — гипербола, при $h=0$ — парабола и при $h=-\frac{\mu}{r_0}$ — окружность.

Рассмотрим теперь какое-нибудь кеплеровское движение, которому соответствуют заданные начальные значения $x_0^{(0)}$, $y_0^{(0)}$, $z_0^{(0)}$, $\dot{x}_0^{(0)}$, $\dot{y}_0^{(0)}$, $\dot{z}_0^{(0)}$, $r_0^{(0)}$, $V_0^{(0)}$, и условимся называть это избранное нами движение *невозмущенным* (здесь — в смысле Ляпунова). Пусть те же буквы без верхнего индекса обозначают начальные данные какого-либо возмущенного (в смысле Ляпунова) движения, и допустим, что начальные возмущения $x_0-x_0^{(0)}$, $y_0-y_0^{(0)}$, $z_0-z_0^{(0)}$, $r_0-r_0^{(0)}$, $\dot{x}_0-\dot{x}_0^{(0)}$, $\dot{y}_0-\dot{y}_0^{(0)}$, $\dot{z}_0-\dot{z}_0^{(0)}$, $V_0-V_0^{(0)}$ могут быть выбраны численно сколь угодно малыми.

Тогда немедленно установим, что невозмущенное движение устойчиво по отношению к каждой из величин

$$h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,$$

которые в силу первых интегралов системы (2.14) являются известными, непрерывными функциями от координат и составляющих скорости. Действительно, в силу указанной непрерывности отмеченные величины изменятся бесконечно мало при бесконечно малом изменении начальных значений, а так как все они сохраняют в данном движении постоянные значения, то последующие возмущения этих величин всегда будут оставаться сколь угодно малыми, откуда и следует устойчивость рассматриваемого движения. Точно так же устанавливается устойчивость любого кеплеровского движения по отношению к каждому из элементов орбиты, а следовательно, для случая эллиптического движения, и по отношению к большой полуоси, среднему движению, периоду обращения и т. п.

Но по отношению к радиусу-вектору (а следовательно, и по отношению к скорости) эллиптическое кеплеровское движение будет неустойчивым.

Действительно, хотя при сколь угодно малых численно начальных возмущениях разность $T - T^{(0)}$ между периодами обращения возмущенного и невозмущенного движений также будет сколь угодно мала численно, но величина $r - r^{(0)}$ не может быть сделана сколь угодно малой для всех значений t. Это легко проверить. Пусть $t_0 = \tau^{(0)}$, и предположим, что разность

$$r_0 - r_0^{(0)} = r_0 - a^{(0)}(1 - e^{(0)})$$

весьма мала численно. После одного оборота, т. е. через время $T^{(0)}$, величина $r^{(0)}$ примет свое начальное значение, но r не будет равно r_0, так как $T \neq T^{(0)}$.

Поэтому после достаточно большого числа k обращений величина r может быть сделана сколь угодно близкой к $a(1+e)$ и разность $r(kT^{(0)}) - r^{(0)}(kT^{(0)})$ будет сколь угодно мало отличаться от величины $a(1+e) - a^{(0)}(1 - e^{(0)})$, которая близка к $2a^{(0)}e^{(0)}$, т. е. есть величина конечная, что и обнаруживает неустойчивость эллиптического движения по отношению к r.

Рассматривая теперь формулы (2.14′) и проводя подобные рассуждения, мы установим также неустойчивость эллиптического движения по отношению к координатам и составляющим скорости.

Наконец, заметим, что обнаруженная неустойчивость не является абсолютной, так как если подчинить начальные возмущения условию $h - h^{(0)} = 0$, т. е. условию неизменяемости полной энергии, то большие полуоси, средние движения и периоды обращений будут одинаковы в невозмущенном и возмущенном движениях, а так как неустойчивость возникает, как показано, вследствие различия периодов, то ясно, что при равных периодах все разности $r - r^{(0)}$, $x - x^{(0)}$, $y - y^{(0)}$, $z - z^{(0)}$, $V - V^{(0)}$, $\dot{x} - \dot{x}^{(0)}$, $\dot{y} - \dot{y}^{(0)}$, $\dot{z} - \dot{z}^{(0)}$, будучи сколь угодно малыми численно в начальный момент, всегда будут оставаться сколь угодно малыми по числовой величине.

7. В заключение этого параграфа сделаем несколько дополнительных замечаний.

Прежде всего заметим, что весьма важным для многих приложений, особенно в небесной механике, случаем является тот, когда заданные величины $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ характеризуют только орбиты (или вообще траектории) точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе. Тогда, ставя вопрос об устойчивости некоторого возмущенного движения по отношению к величинам такого рода, мы желаем узнать, будут или нет оставаться траектории возмущенного движения близкими к траекториям невозмущенного движения.

Такую задачу называют иногда задачей об орбитальной устойчивости. Ярким примером задачи такого рода является задача об устойчивости кеплеровского движения относительно кеплеровских элементов планетных орбит в Солнечной системе.

Важнее обратить внимание на то, что хотя в теории Ляпунова мы и встречаемся с названиями «начальные или последующие возмущения», «уравнения возмущенного движения» и т. д., но постоянно действующих возмущающих сил в этой теории нет!

Возмущения в какой-либо момент времени обусловливаются исключительно начальными возмущениями, возникающими вследствие неизбежных ошибок при определении начальных данных либо вследствие некоторой мгновенной посторонней силы. Иными словами, и невозмущенное и всякое возмущенное движения определяются одними и теми же дифференциальными уравнениями, только с различными начальными условиями. Эффект посторонней, т. е. не учтенной при составлении дифференциальных уравнений, возмущающей силы проявляется только в том, что в некоторый момент, который мы принимаем за начальный, изменяются начальные условия, соответствующие невозмущенному движению.

Если мы желаем учитывать также постоянное действие неучтенных в данной задаче посторонних сил, то в этом случае нужно заменить (или дополнить) теорию А. М. Ляпунова, что возможно сделать, например, рассмотрением устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Для этого заменим систему (2.1) следующей системой:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) + R_s(t \mid x_\sigma), \tag{2.1''}$$

где R_s — дополнительные функции, не обращающиеся в нуль в начале координат, так что

$$R_s(t \mid 0) \neq 0,$$

и которые, вообще, могут оставаться неизвестными и неопределимыми аналитически и проявляются только своими свойствами.

Определение устойчивости нулевого решения системы (2.1) при постоянно действующих возмущениях можно сформулировать следующим образом:

Определение. *Невозмущенное движение, т. е. нулевое решение*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots, \ x_n = 0$$

системы (2.1), *называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, обусловленных функциями* $R_s(t \mid x_\sigma)$, *если всякому, произвольно задаваемому положительному числу* $\varepsilon \leqslant A$ *соответствуют такие положительные числа* $\lambda \leqslant \varepsilon$ *и* r, *зависящие от* ε, *что при всяких начальных условиях* $x_s^{(0)}$, *удовлетворяющих* *условиям*

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda,$$

и при всяких функциях R_s, *удовлетворяющих при* $|x_s| < \varepsilon$ *и* $t > t_0$ *неравенствам*

$$|R_s(t \mid x_\sigma)| < r,$$

всякое решение $x_s(t)$ *системы* (2.1) *будет удовлетворять для всякого* $t > t_0$ *условиям*

$$|x_s(t)| < \varepsilon.$$

В противном случае нулевое решение системы (2.1) *называется неустойчивым при постоянно действующих возмущениях, как бы ни была мала их амплитуда* r.

Последнее замечание относится к следующему вопросу. Может случиться, и это будет наиболее общим случаем, что движение интересующей нас механической системы может быть рассматриваемо только в течение некоторого промежутка времени, начиная от начального момента t_0 до некоторого конечного момента $\bar{t} > t_0$, за пределами которого рассматривать задачу по каким-либо причинам не имеет смысла или не представляет интереса. Определения теории устойчивости в смысле Ляпунова, равно как и определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях, и в этих случаях не утрачивают значения. Только в определениях фразу «... для всех значений $t > t_0$ ...» следует заменить словами «... для всех значений t в промежутке $(t_0, \bar{t})$ ...».

При этом, если невозмущенное движение неустойчиво в смысле Ляпунова, то это означает, что величина τ, играющая роль в определении неустойчивости, такова, что $\tau < \bar{t}$. Таким образом, если невозмущенное движение неустойчиво, то последующие возмущения не способны оставаться численно меньшими назначенного предела ε в течение всего того промежутка времени, когда имеет смысл рассматривать данное движение.

§ 2. Основы второго метода А. М. Ляпунова

1. Как мы видели, всякая задача об устойчивости заданного невозмущенного движения относительно даных функций обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени всегда может быть приведена к единообразной математической задаче об устойчивости нулевого решения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка, вида (2.1), относительно величин x_s.

Эта последняя задача, конечно, может быть разрешена без особых затруднений, если система (2.1) интегрируема, т. е. если возможно получить явные выражения для x_s как функций времени и n произвольных постоянных $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих уравнениям (2.1). Несколько примеров такого рода мы привели в предыдущем параграфе.

Однако, как хорошо известно, не существует никакого общего метода для такого интегрирования, так что, вообще говоря, уравнения (2.1) являются неинтегрируемыми, вследствие чего задача об устойчивости превращается в исключительно важную проблему качественной теории дифференциальных уравнений, а методы решения этой задачи являются одновременно методами качественной теории, или *качественными методами*.

Сам А. М. Ляпунов предложил два метода решения задачи об устойчивости, которые он назвал соответственно «первой методой» и «второй методой».

Первый метод, или *метод характеристических чисел*, основывается на разыскании общего решения системы (2.1) в виде бесконечных рядов особого вида, исследование которых и позволяет в ряде случаев решить поставленную задачу об устойчивости. Второй метод, или *прямой метод Ляпунова* (метод функций V Ляпунова), не зависит вовсе от разыскания тех или иных рядов, удовлетворяющих уравнениям возмущенного движения, а основывается на разыскании некоторых функций, удовлетворяющих некоторым, достаточно общим условиям.

Применение первого метода всегда требует длительных вычислений и громоздких выкладок, связанных с употреблением бесконечных рядов, а вместе с тем и тонких исследований сходимости, а поэтому этот метод оказывается мало удобным для решения вопроса об устойчивости и редко применяется.

Второй метод является гораздо более простым и вместе с тем более эффективным, и его мы здесь только и рассмотрим.

Пусть V — вещественная функция вещественных переменных $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, подчиненных условиям

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.15}$$

где t_0 — начальный момент и H — некоторая, отличная от нуля постоянная.

При этом всегда будем предполагать, что рассматриваемая функция V непрерывна и однозначна в области (2.15) и уничтожается, когда все x_s равны нулю (при любом t).

Одновременно с функцией V будем рассматривать также ее полную производную по t, взятую в предположении, что величины x_s, рассматриваемые как функции t, удовлетворяют уравнениям возмущенного движения (2.1).

Обозначая эту производную через V', имеем

$$V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s, \tag{2.16}$$

причем очевидно, что V' есть, так же как и V, непрерывная, однозначная функция переменных t, x_s в области (2.15), обращающаяся в нуль при одновременном равенстве нулю всех x_s.

Функция $V(t|x_\sigma)$ рассматриваемого характера называется обыкновенно *функцией Ляпунова*. Ясно, что функция $V'(t|x_\sigma)$, определенная формулой (2.16), или *производная функции V в силу уравнений возмущенного движения* также есть функция Ляпунова.

Кроме уже упомянутых свойств, функция Ляпунова может обладать и другими более специальными свойствами, для которых введем, следуя А. М. Ляпунову, некоторые особые названия.

Пусть при условиях (2.15) рассматриваемая функция V принимает, кроме равных нулю, значения только одного знака.

Такую функцию будем называть *знакопостоянной*. Когда же будет желательно отметить ее знак, то будем говорить, что она есть функция *положительная* или *отрицательная*.

Если функция V при условиях (2.15) может получать как положительные, так и отрицательные значения, то будем называть ее *знакопеременной функцией*.

Если знакопостоянная функция V не зависит от t, а постоянная H может быть выбрана достаточно малой для того, чтобы при условиях (2.15) функция V обращалась в нуль только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (т. е. только в начале координат), то такую функцию будем называть *знакоопределенной*, а желая обратить внимание на ее знак, — *знакоопределенной положительной* или *знакоопределенной отрицательной*.

Функцию V, зависящую от t, будем называть знакоопределенной только при условии, если для нее возможно найти такую не зависящую от t определенно положительную функцию W, чтобы выполнялось одно из двух неравенств:

$$V \geqslant W \quad \text{или} \quad -V \geqslant W.$$

Так, например, каждая из двух функций

$$e^{-t}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right), \quad e^t\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \qquad (t_0 = 0)$$

есть знакопостоянная положительная функция. Но первая есть только знакопостоянная, а вторая является также знакоопределенной.

Допустим теперь, что рассматриваемая функция V такова, что для ее числовых значений существует при условиях (2.15) некоторый положительный высший предел, т. е. существует такое постоянное число $L > 0$, что при $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant H$ выполняется неравенство $|V| \leqslant L$.

Функцию V, удовлетворяющую этому условию, будем называть *ограниченной*, а в противном случае — *неограниченной*.

Так, из двух вышеприведенных функций первая — ограниченная, а вторая — неограниченная. Полезно отметить, кроме того, что всякая функция Ляпунова, не зависящая от t, есть всегда функция ограниченная, что вытекает просто из условия непрерывности этой функции.

Введем теперь важное понятие бесконечно малого высшего предела для функции Ляпунова.

Ограниченная функция V может быть такова, что для всякого положительного ε, как бы мало оно ни было, найдется такое отличное от нуля число h, при котором для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

будет выполняться неравенство $|V| \leqslant \varepsilon$. Тогда мы будем говорить, что функция V допускает бесконечно малый высший предел (или V имеет бесконечно малый высший предел).

Очевидно, что всякая функция Ляпунова, не зависящая от времени, заведомо допускает бесконечно малый высший предел в силу непрерывности, так как для такой функции определение существования бесконечно малого высшего предела просто совпадает с определением непрерывности.

Но функции, зависящие от t, хотя бы и ограниченные, могут не иметь бесконечно малого высшего предела, что показывают следующие простые примеры:

$$\sin\left[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, t\right], \quad 1 - \cos\left[(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\, t^2\right],$$

так как каждую из этих функций при сколь угодно малых $|x_s|$ можно сделать по числовой величине сколь угодно близкой к единице.

Функция Ляпунова, допускающая бесконечно малый высший предел, обладает одним важным свойством, заключающимся в следующем.

Пусть V — функция, допускающая бесконечно малый высший предел. Тогда, *если нам известно, что переменные удовлетворяют условиям $t \geqslant t_0$, $|V| \geqslant l$, где l есть некоторое положительное число, то отсюда следует, что обязательно найдется некоторое другое положительное число λ, меньше которого не может быть наибольшая из величин $|x_1|$, $|x_2|$, ..., $|x_n|$.*

Доказательство заключается в простом рассуждении от противного. Действительно, если бы такое число λ не существовало, то все $|x_s|$ можно было бы выбрать сколь угодно малыми, а тогда, по свойству бесконечно малого высшего предела, и $|V|$ было бы сколь угодно малым, что противоречит условию. Поэтому, если обозначим через x наибольшую из $|x_s|$, то при заданном l обязательно найдется такое λ, зависящее от l, что при условии $|V| \geqslant l$ будем иметь неравенство $x \geqslant \lambda$.

Нам понадобится в дальнейшем еще одно свойство функций А. М. Ляпунова. Пусть W — некоторая знакоопределенная положительная функция, не зависящая от t. Рассмотрим всевозможные системы значений независимых переменных x_s, удовлетворяющих условию $x = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < H$.

Всякой системе значений x_s, удовлетворяющих этому условию, соответствует некоторое определенное значение функции W, которое заведомо не равно нулю и положительно (в силу свойства функции W как знакоопределенной положительной). Среди всех этих значений найдется одно, по крайней мере наименьшее, которое обозначим через l. Иными словами, l есть точная низшая граница значений функции W, когда переменные удовлетворяют условию $x = \varepsilon$.

2. Переходим к установлению теорем А. М. Ляпунова, дающих достаточные условия устойчивости. Основная теорема гласит:

Первая теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой V' в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство. Пусть найденная функция V — знакоопределенно положительна, а V' — отрицательная функция или тождественно равна нулю *). Тогда найдется такая, не зависящая от t определенно положительная функция W, что при условиях (2.15) будут иметь место неравенства

$$V(t \mid x_\sigma) \geqslant W(x_\sigma), \quad V'(t \mid x_\sigma) \leqslant 0. \tag{2.17}$$

Согласно определению понятия устойчивости (разд. 2 § 1) нужно показать, что для всякого положительного $\varepsilon < H$ можно найти такое положительное $\lambda < \varepsilon$, что при любых вещественных начальных возмущениях $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих неравенствам $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, мы будем иметь для всякого $t \geqslant t_0$ следующие неравенства: $|x_s(t)| < \varepsilon$.

Пусть задано отличное от нуля положительное $\varepsilon < H$, и пусть l — точная низшая граница функции $W(x_\sigma)$ при условии, что $x = \varepsilon$. Рассмотрим функцию $V(t_0|x_\sigma)$, не зависящую от t и стало быть допускающую бесконечно малый высший предел. Поэтому для найденного l (зависящего от ε), обязательно найдется такое λ (зависящее от l, а следовательно, и от ε), что для значений переменных, удовлетворяющих условиям $|x_s| \leqslant \lambda$,

---

*) Полезно отметить, что если функция V' тождественно равна нулю, то $V = \text{const}$ есть первый интеграл системы (2.1).

значения функции $V(t_0|x_\sigma)$ будут удовлетворять неравенству

$$V(t_0|x_\sigma) < l.$$

Выберем теперь начальные возмущения $x_s^{(0)}$ согласно условию

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и обозначим через V_0 соответствующее значение функции V, так что

$$V_0 = V(t_0|x_\sigma^{(0)}) < l.$$

Из соотношения

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} V'\,dt, \tag{2.18}$$

согласно неравенствам (2.17), немедленно выведем, что функции x_s, удовлетворяющие системе (2.1) и начальным условиям $x_s^{(0)}$, выполняющим неравенства $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, для всякого $t \geqslant t_0$ будут удовлетворять условиям

$$W(x_\sigma) \leqslant V(t|x_\sigma) \leqslant V_0 < l,$$

а следовательно, и условиям

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

так как l — точная низшая граница функции W для всех значений x_s, удовлетворяющих условию $x = \varepsilon$.

Этим самым теорема и доказана.

П р и м е р: пусть даны уравнения с периодическими коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = -\cos^2 t \cdot x + (\sin t \cos t + 1) \cdot y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sin t \cos t - 1) \cdot x - \sin^2 t \cdot y.$$

Чтобы исследовать устойчивость нулевого решения предложенной системы, зададим функцию Ляпунова в виде

$$V = x^2 + y^2.$$

Производная от этой функции в силу предложенных уравнений приведется к виду

$$V' = -2(x \cos t - y \sin t)^2.$$

Очевидно, что V' есть знакопостоянная отрицательная функция. А так как сама функция V знакоопределенная положительная, то, по доказанной теореме, невозмущенное движение устойчиво.

Заметим, что общее решение заданной системы имеет вид

$$x = x_0 e^{-t}\cos t + y_0 \sin t,$$
$$y = -y_0 e^{-t}\sin t + y_0 \cos t,$$

что подтверждает сделанное заключение.

Из доказанной теоремы Ляпунова вытекает, как частный случай, известная теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы в случае, когда силовая функция имеет в положении равновесия изолированный максимум. Действительно, пусть движение системы определяется уравнениями (2.5), где $U = U(q_\sigma)$, а T — квадратичная форма от p_σ, не зависящая от времени.

Тогда $H = T - U$ и положению равновесия соответствует частное решение уравнений (2.5‴) вида

$$q_s = \alpha_s, \quad p_s = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

где α_s — постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Рассматривая положение равновесия как невозмущенное движение, имеем уравнения возмущенного движения в виде (2.13′), где $x_s = q_s - \alpha_s$, $y_s = p_s$ и

$$K(x_\sigma \mid y_\sigma) = H(\alpha_\sigma + x_\sigma,\ y_\sigma) - H(\alpha_\sigma \mid 0) = T - [U(\alpha_\sigma + x_\sigma) - U(\alpha_\sigma)].$$

Если $U(\alpha_\sigma)$ — изолированный максимум функции U, то при достаточно малых $|x_s|$ имеем

$$U(\alpha_\sigma + x_\sigma) - U(\alpha_\sigma) < 0,$$

а следовательно, K — положительная функция от x_s, y_s (T — заведомо положительна), обращающаяся в нуль только при $x_s = y_s = 0$. Таким образом, K есть знакоопределенная положительная функция, а так как она не зависит от времени, то ее производная в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, а поэтому, по теореме Ляпунова, невозмущенное движение (т. е. положение равновесия) действительно устойчиво, и теорема Лагранжа доказана.

Рассмотрим теперь теорему об асимптотической устойчивости, которую сформулируем следующим образом *):

Вторая теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно*

---

*) В сочинении А. М. Ляпунова эта теорема формулирована только в виде примечания к основной теореме об устойчивости. В виде отдельной теоремы это примечание сформулировано впервые мною в 1935 г. в дополнении к переводу книги: Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935.

найти знакоопределенную функцию V, допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой V' в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Доказательство. Пусть найденная функция V определенно положительна, а V' определенно отрицательна.

Тогда существует такое $H \leqslant A$ и такие две, не зависящие от времени, знакоопределенные положительные функции W и W', что при $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant H$ мы будем иметь

$$V(t \mid x_\sigma) \geqslant W(x_\sigma), \quad -V'(t \mid x_\sigma) \geqslant W'(x_\sigma). \tag{2.19}$$

Так как найденная функция V заведомо удовлетворяет условиям первой теоремы, то, задав произвольно число $\lambda < H$, можно найти такое положительное $\bar{\varepsilon}\,(\lambda < \bar{\varepsilon} < H)$, что, выбрав начальные значения согласно условиям $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, мы будем иметь для всякого $t \geqslant t_0$ неравенства $|x_s(t)| < \bar{\varepsilon}$.

А тогда можно найти такое положительное число $h < \bar{\varepsilon}$ (зависящее от $\bar{\varepsilon}$, а следовательно и от λ), что последующие возмущения для всякого $t \geqslant t_0$ будут удовлетворять условиям $|x_s| \leqslant h < \bar{\varepsilon} < H$.

Докажем теперь, что если неравенства $|x_s| \leqslant h$ выполняются для всякого $t \geqslant t_0$, то в силу свойств найденной функции V нельзя найти такое положительное число l, которое было бы меньше всех значений, получаемых функцией $V(t|x_\sigma)$ во всяком возмущенном движении, для которого $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$.

Докажем это вспомогательное предложение методом от противного. Допустим, что существует такое l, что при условиях $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant h$ мы имеем постоянно $V > l$. Тогда, по свойству функции $V(t|x_\sigma)$, как допускающей бесконечно малый высший предел, найдется такое положительное $\bar{\lambda}$ (разумеется, меньшее чем h), что мы будем иметь $x > \bar{\lambda}$ для всякого $t \geqslant t_0$.

Но тогда функция $-V'$ будет иметь некоторый положительный низший предел. Действительно, при условиях $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant \leqslant h$ (так как $h < H$) мы имеем $-V' \geqslant W'$, причем W' обращается в нуль, только когда все x_s суть нули. Но последний случай будет исключен, если переменные подчинить условию $\bar{\lambda} \leqslant x \leqslant h$, а поэтому при этих условиях W' будет иметь некоторый положительный низший предел, так что будем иметь $-V' \geqslant W' > l'$. Но тогда из (2.18) немедленно выведем

$$V < V_0 - l'(t - t_0)$$

для всякого $t \geqslant t_0$, что невозможно, так как правая часть этого неравенства при достаточно большом t делается отрицательной. Полученное противоречие показывает, что, каково бы ни было число l, всегда наступит момент $t = \tau$, когда функция V сделается равной l. А так как V' в рассматриваемом возмущенном движении постоянно отрицательна, то для всякого $t \geqslant t_0$ функция V будет всегда оставаться меньшей l (в силу свойства монотонно убывающей функции).

Установив это, выберем произвольно число $\varepsilon < \lambda$ и рассмотрим всевозможные системы значений величин x_s, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon \leqslant x \leqslant h. \tag{2.20}$$

Пусть l — точный низший предел W при условии (2.20) зависящий, очевидно, от ε и h, т. е. от ε и λ. Согласно доказанному выше обязательно наступит момент $\tau > t_0$, когда функция V сделается и будет затем оставаться меньше определенного так числа l.

А тогда, начиная по крайней мере с этого момента τ, будем иметь $|x_s(t)| < \varepsilon$, откуда следует, что при $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$ будем необходимо иметь $\lim\limits_{t \to \infty} x_s(t) = 0$, а следовательно, теорема доказана.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть предложены уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x - y + (x - y)(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = +x - y + (x + y)(x^2 + y^2),$$

и требуется исследовать устойчивость нулевого решения этих уравнений относительно величин x и y.

Рассмотрим функцию V вида

$$V = x^2 + y^2,$$

которая, очевидно, есть знакоопределенная, положительная. В силу заданных уравнений находим

$$V' = -2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2),$$

что будет знакоопределенной отрицательной функцией при

$$x^2 + y^2 < 1.$$

Поэтому, если начальные значения x_0, y_0 выбраны согласно условию

$$x_0^2 + y_0^2 < 1,$$

то будем иметь

$$\lim_{t \to \infty} (x^2 + y^2) = 0,$$

что показывает, что нулевое решение предложенных уравнений устойчиво асимптотически.

3. Рассмотрим теперь теоремы А. М. Ляпунова, устанавливающие достаточные условия неустойчивости. Этих теорем — две *).

Третья теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной V', притом допускала бы бесконечно малый высший предел и была бы такова, чтобы при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно насколько угодно малых, ее можно было сделать величиной одинакового знака с ее производной, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Допустим, что найдена функция V, удовлетворяющая этим требованиям, и что производная ее V' — функция знакоопределенная положительная. Для этой функции найдутся такие две постоянные t_0 и H (t_0 рассматриваем как начальный момент), при которых для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям (2.15), будут выполняться следующие:

$$V'(t\,|\,x_\sigma) \geqslant W(x_\sigma), \quad |V(t\,|\,x_\sigma)| < L,$$

где L — некоторая положительная постоянная, а W — не зависящая от t положительная функция, не уничтожающаяся при условиях (2.15) иначе, как при равенстве нулю всех x_s.

Тогда, предполагая, что начальные возмущения $x_s^{(0)}$ выбраны согласно условиям $|x_s^{(0)}| < H$, выведем из формулы (2.18)

$$V(t\,|\,x_\sigma) > V(t_0\,|\,x_\sigma^{(0)}) = V_0 \tag{2.21}$$

для всех значений $t \geqslant t_0$ и удовлетворяющих требованию, чтобы в промежутке от t_0 до t условия $|x_s| \leqslant H$ оставались постоянно выполненными.

Мы замечаем теперь, что по свойству функции V постоянную t_0 можно предположить достаточно большой для того, чтобы надлежащим выбором величин $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих условиям $|x_s^{(0)}| < \lambda$ при всяком отличном от нуля, но сколь угодно малом положительном λ, величину V_0 можно было сделать положительной.

Если же $V_0 > 0$, то по свойству бесконечно малого высшего предела найдем такое положительное число ε, которое будет менее всех значений, возможных при условии (2.21) (когда

*) В сочинении Ляпунова теоремы о неустойчивости называются второй и третьей. Но мы называем второй теоремой теорему об асимптотической устойчивости, а поэтому здесь теоремы о неустойчивости именуются третьей и четвертой теоремами второго метода.

$t \geqslant t_0$) для наибольшей x из величин $|x_s|$. А тогда, если l есть какое-либо положительное число, меньшее всех значений, возможных для функции W при условии $\varepsilon \leqslant x \leqslant H$, то из (2.18) и (2.21) выведем следующее неравенство:

$$V > V_0 + l(t - t_0), \tag{2.22}$$

которому будет удовлетворять функция V для $t > t_0$, если в промежутке от t_0 до t условия $|x_s| \leqslant H$ никогда не нарушаются.

Но при тех же условиях функция V должна оставаться численно меньше, чем L. А это условие может существовать совместно с неравенством (2.22) только при значениях t, меньших числа

$$\tau = t_0 + \frac{L - V_0}{l}.$$

Поэтому надо допустить, что в промежутке от t_0 до τ найдется такое значение t, начиная с которого по крайней мере одно из условий $|x_s| \leqslant H$ перестанет быть постоянно выполненным. Таким образом, убеждаемся в том, что как бы ни было мало λ, которого по нашему желанию не должны превосходить числовые значения $x_s^{(0)}$, но если последние выбраны так, чтобы было $V_0 > 0$, то всегда наступит момент, когда по крайней мере одна из величин $|x_s|$ достигнет неизменного предела H (а значит, и всякого другого заданного предела ε, меньшего H). А этим и обнаруживается неустойчивость невозмущенного движения.

Примечание. Может случиться, что найденная функция V, удовлетворяя условиям теоремы, есть знакоопределенная функция. Тогда (если $V > 0$) условие $V_0 > 0$ будет выполняться для всяких, численно достаточно малых, начальных возмущений $x_s^{(0)}$. Следовательно, в этом случае невозмущенное движение будет абсолютно неустойчиво.

Рассмотрим для примера следующую систему:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)y + m(t)y(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = q(t)x - p(t)y + m(t)x(x^2 + y^2),$$

где $p(t)$, $q(t)$, $m(t)$ — непрерывные при $t \geqslant t_0$ функции времени.

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = xy,$$

которая является знакопеременной ограниченной функцией.

В силу заданных уравнений находим

$$V' = q(t)(x^2 + y^2) + m(t)(x^2 + y^2)^2,$$

и если функции $q(t)$ и $m(t)$ таковы, что для всякого значения $t \geqslant T > t_0$ мы имеем

$$q(t) \geqslant q_0 > 0, \quad m(t) \geqslant 0,$$

то V' есть знакоопределенная положительная функция.

Так как функцию V можно всегда сделать надлежащим выбором x и y, численно насколько угодно малых, величиной положительной, то условия третьей теоремы выполнены и, следовательно, нулевое решение предложенных уравнений неустойчиво относительно величин x и y.

Четвертая теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию V, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду*

$$V' = \chi V + W, \tag{2.23}$$

где χ — или положительная постоянная, или такая положительная функция времени, что интеграл от χ в пределах от t_0 до t расходится, а W или тождественно равна нулю, или знакопостоянна, и если в последнем случае найденная функция V такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, насколько угодно численно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво *).

Доказательство. Пусть найденная функция V, удовлетворяющая этим требованиям, такова, что W есть функция положительная. По свойству функций V и W найдутся такие постоянные t_0 (что примем за начальный момент) и H, при которых для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям вида (2.15), будут выполняться следующие:

$$|V(t \mid x_\sigma)| < L, \quad W(t \mid x_\sigma) \geqslant 0,$$

где L — некоторая положительная постоянная. Притом постоянную t_0 можем предположить достаточно большой для того, чтобы надлежащим выбором начальных возмущений $x_s^{(0)}$ соответствующее значение $V_0 = V\left(t_0 \mid x_\sigma^{(0)}\right)$ функции V можно было сделать положительным.

Тогда при $t > t_0$ из соотношения (2.23) имеем

$$\frac{dV}{dt} - \chi V \geqslant 0 \tag{2.23'}$$

для всех значений t, при которых $|x_s| \leqslant H$.

*) Функция W может быть и знакоопределенной. Отметим еще, что в формулировке Ляпунова χ есть постоянная.

Поэтому, если от t_0 до t эти условия постоянно выполняются, то будем иметь

$$V \geqslant V_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} \chi\, dt}$$

и, следовательно,

$$L > V_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} \chi\, dt}.$$

Но при положительном V_0 последнее неравенство может иметь место только для значений t, меньших величины τ, определяемой формулой

$$\int\limits_{t_0}^{\tau} \chi(t)\, dt = \ln \frac{L}{V_0}.$$

Поэтому в промежутке от t_0 до t условия $|x_s(t)| < H$ не могут постоянно выполняться.

Отсюда так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, заключаем, что невозмущенное движение неустойчиво.

Если $W \equiv 0$, то неравенство (2.23′) сделается равенством, откуда найдем $V = V_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} \chi\, dt}$, а дальнейший ход доказательства не изменится. (В этом случае равенство $Ve^{-\int\limits_{t_0}^{t} \chi\, dt} = V_0 = \text{const}$ будет, очевидно, одним из первых интегралов уравнений возмущенного движения (2.1).)

Рассмотрим пример. Пусть даны уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \chi(t)\, x + p(t)\, y + m(t)\, x\,(x^2 - y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = p(t)\, x + \chi(t)\, y + m(t)\, y\,(x^2 - y^2),$$

где $\chi(t)$, $p(t)$, $m(t)$ — непрерывные при $t \geqslant t_0$ функции времени.

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = x^2 - y^2$$

— ограниченную знакопеременную функцию.

В силу предложенных уравнений находим

$$V' = 2\chi(t)(x^2 - y^2) + 2m(t)(x^2 - y^2)^2$$

или

$$V' = 2\chi(t)\, V + W,$$

где положено
$$W = 2m(t)(x^2 - y^2)^2.$$

Поэтому, какова бы ни была функция $p(t)$, если $m(t) \geqslant 0$, и если χ есть или положительная постоянная, или такая положительная функция t, что интеграл

$$\int_{t_0}^{t} \chi(t)\,dt$$

расходится при $t \to \infty$, то нулевое решение данных уравнений неустойчиво относительно величин x и y.

Примечание 1. До сих пор мы предполагали, что для последующих возмущений $x_s^{(0)}$ возможны всякие вещественные значения, по крайней мере достаточно малые численно. Но могут встретиться случаи, когда по самому значению этих переменных для некоторых из них возможны величины только одного из двух знаков. Для этого, конечно, дифференциальные уравнения (2.1) должны быть таковы, чтобы условия эти, которые будут вида
$$x_i \geqslant 0, \quad x_j \leqslant 0,$$
выполнялись во все время движения, будучи выполнены в начальный момент.

В подобных случаях, применяя третью и четвертую теоремы надо иметь в виду, чтобы функция V была способна принимать нужный знак, когда учитываются написанные выше условия.

Примечание 2. Полезно отметить, что доказанные нами теоремы не дают сами по себе никакого способа для нахождения, или построения, нужной функции V.

Поэтому, желая рассмотреть какую-либо задачу об устойчивости при помощи теорем второго метода Ляпунова, мы должны как-то подобрать необходимую функцию V, что вообще не является простой задачей.

Обычно в приложениях стараются использовать функции Ляпунова возможно более простого вида, например в виде линейной или квадратичной формы от величин x_s с какими-либо, лучше всего с постоянными, коэффициентами. В ряде случаев такой подбор, как будет видно из дальнейшего, оказывается возможным и задача об устойчивости может быть решена.

Примечание 3. Независимая переменная t не обязательно должна быть временем, но, во всяком случае, это будет величина, являющаяся однозначной, непрерывной и монотонно возрастающей функцией от времени.

4. Рассмотренные выше теоремы второго метода А. М. Ляпунова, устанавливающие достаточные признаки устойчивости или неустойчивости нулевого решения дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1), дополним теперь важной теоремой об устойчивости невозмущенного движения при постоянно действующих возмущениях. Эта теорема, равно как и основное определение, приведенное в конце § 1 этой главы, были установлены впервые автором этой книги в 1940 г. В 1944 г. теорема была несколько обобщена И. Г. Малкиным, доказательство которого мы здесь и приводим.

Теорема Дубошина — Малкина. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (2.1) *существует знакоопределенная положительная функция* $V(t \mid x_\sigma)$, *производная которой в силу этих уравнений есть функция определенно отрицательная с ограниченными в области* (2.15) *частными производными* $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, *то невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство: согласно условиям теоремы существует такое положительное число $H \leqslant A$ и такие две, не зависящие от времени знакоопределенные положительные функции $W(x_\sigma)$ и $W'(x_\sigma)$, что при $t \geqslant t_0$ и $|x_s| \leqslant H$ мы будем иметь неравенства

$$\left.\begin{aligned} V(t \mid x_\sigma) &\geqslant W(x_\sigma), \\ -V'(t \mid x_\sigma) &\geqslant W'(x_\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{2.2'}$$

Теперь, на основании известной теоремы о среднем, мы можем написать

$$V(t \mid x_\sigma) = \sum_{s=1}^{n} x_s V'_{x_s}(t \mid \theta x_\sigma),$$

где $0 < \theta < 1$. Так как производные $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, по условию теоремы, ограничены, то для всякого положительного числа h, как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число l, что при $t \leqslant t_0$, $|x_s| < h$ мы будем иметь

$$V(t \mid x_\sigma) < l. \tag{2.3''}$$

Таким образом, найденная функция V допускает бесконечно малый высший предел.

Обозначим, как и ранее, через x наибольшую из величин $|x_s|$ и через l' точный нижний предел функции W' при условии $\varepsilon \leqslant x \leqslant H$, где ε — произвольно заданное положительное число, меньшее H.

Тогда из неравенств (2.2′) выводим при $t \geqslant t_0$, $x \geqslant \varepsilon$

$$V(t \mid x_\sigma) \geqslant l'. \tag{2.4'}$$

Пусть, далее, l — положительное число, меньшее l'. Рассмотрим всевозможные значения переменных x_s, удовлетворяющие условию

$$V(t \mid x_\sigma) = l'. \tag{2.5$^{\text{IV}}$}$$

Из (2.4′) следует, что для всех таких значений величин x_s выполняется условие $x \geqslant \lambda$, где λ — некоторое достаточно малое положительное число. Кроме того, из (2.4′) следует, что для всех таких значений x_s выполняется условие $x < \varepsilon$ и, следовательно, для всех t и при x_s, удовлетворяющих (2.5$^{\text{IV}}$), выполняется второе из неравенств (2.2′). Мы можем поэтому написать:

$$V'(t \mid x_\sigma) \leqslant -k^2,$$

где k^2 отлично от нуля, так как $x \geqslant \lambda$.

Но тогда в силу ограниченности производных от функции $V(t|x_\sigma)$ можно найти настолько малое число $r > 0$, чтобы при

$$|R_s(t \mid x_\sigma)| \leqslant r \tag{2.6′}$$

и значениях x_s, удовлетворяющих (2.5$^{\text{IV}}$), выполнялось неравенство

$$\frac{dV}{dt} = V' + \sum_{s=1}^{n} R_s \frac{\partial V}{\partial x_s} < 0. \tag{2.7′}$$

Будем теперь рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (2.1″), т. е. уравнениям

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) + R_s(t \mid x_\sigma),$$

в предположении, что выполняются неравенства (2.6′).

Начальные значения величин x (при $t = t_0$) выберем, согласно условиям

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \tag{2.8″}$$

где положительное число η настолько ма́ло, что выполняются неравенства

$$\eta < \varepsilon, \quad V(t_0 | x_\sigma^0) < l. \tag{2.9″}$$

Докажем, что для всех $t \geqslant t_0$ функции x_s, принимающие при $t = t_0$ значения x_s^0 и удовлетворяющие уравнениям (2.1″), будут удовлетворять неравенствам

$$|x_s| < \varepsilon. \tag{2.10″}$$

В самом деле, функции x_s не могут перестать удовлетворять неравенствам (2.10″) иначе, как достигнув таких значений, при которых будет выполнено неравенство $x \geqslant \varepsilon$. Но тогда из (2.4′) следует, что функция $V(t|x_\sigma(t))$ станет большей, чем l, так как $l < l'$. Так как в начальный момент эта функция меньше l, то должен существовать такой момент времени, при котором эта функция принимает значение l, переходя от значений, меньших l, к значениям, бо́льшим l.

Но тогда в этот момент времени V' сделается величиной положительной, что противоречит неравенству (2.7′).

Следовательно, при условиях (2.6′) и (2.8″) условия (2.10″) будут выполняться для всякого $t > t_0$, что и требовалось доказать.

Примечание. Следует отметить, что при условиях теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости всякое другое решение уравнений (2.1), достаточно близкое к невозмущенному по начальным условиям, неограниченно приближается к нулевому решению, когда $t \to \infty$. Если же выполняются условия теоремы Дубошина — Малкина, то всякое решение системы (2.1″), начальные значения которых численно сколь угодно малы, вовсе не стремится к нулевому решению системы (2.1), но всегда остается сколь угодно близким к этому решению, т. е. к невозмущенному движению.

Однако существуют примеры, в которых движение, обладающее устойчивостью при постоянно действующих возмущениях, обладает также некоторой асимптотической устойчивостью и при $t \to \infty$, неограниченно приближается к некоторому другому решению системы (2.1), отличному от нулевого решения.

Один пример такого рода дан автором в 1952 г. (Вестник МГУ).

§ 3. Задача об устойчивости установившегося движения

Теоремы, доказанные в § 2, дают, как уже было отмечено, достаточные признаки устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения, т. е. нулевого решения системы (2.1). Однако разыскание функций Ляпунова является чрезвычайно сложной и трудной задачей, а поэтому желательно указать некоторые приемы, позволяющие в ряде случаев облегчить нахождение таких функций или по крайней мере установить их существование.

Мы рассмотрим эту задачу сначала для установившегося движения (автономного, по другой терминологии), т. е. когда правые части уравнений (2.1) не зависят явно от времени t.

1. Рассмотрим сначала вспомогательную алгебраическую задачу. Пусть дано линейное уравнение с частными производными

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \varkappa V, \tag{2.24}$$

где $\varkappa$ — некоторая постоянная, а $p_{s\sigma}$ — постоянные коэффициенты. Будем искать решение этого уравнения в виде целой однородной функции данной степени m от величин x_s.

Пусть сначала $m = 1$, т. е. будем искать решение вида

$$V = A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n. \tag{2.24'}$$

Подставляя это выражение в (2.24) и приравнивая коэффициенты при x_s слева и справа, получим следующие уравнения, которым должны удовлетворять неизвестные коэффициенты A_s:

$$p_{1s}A_1 + \ldots + (p_{ss} - \varkappa)A_s + \ldots + p_{ns}A_n = 0.$$

Для того чтобы эта система линейных однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо, как известно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, был равен нулю. Но легко видеть, что этот определитель совпадает с основным определителем $D(\varkappa)$ (см. главу I, § 3, разд. 2) системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $p_{s\sigma}$. Поэтому, для того чтобы уравнение (2.24) имело решение вида (2.24′), необходимо, чтобы постоянная $\varkappa$ была корнем определяющего уравнения

$$D(\varkappa) = |P - \varkappa E| = 0. \tag{2.25}$$

Пусть теперь $m > 1$. Будем искать решение уравнения (2.24) в виде формы m-й степени, полагая

$$V = \sum A^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{2.26}$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа m_s, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{s=1}^{n} m_s = m$. Эта форма заключает в себе N неопределенных коэффициентов, где

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

Таково же будет и число уравнений, линейных и однородных относительно этих неизвестных коэффициентов, которые получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ в обеих частях (2.24) после подстановки туда формы (2.26). Поэтому, чтобы уравнения относительно неизвестных $A^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ имели ненулевые решения, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Обозначая этот определитель через $D_m(\varkappa)$ и приравнивая его нулю, получим уравнение вида

$$D_m(\varkappa) = |a_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa| = 0, \tag{2.26'}$$

где $a_{s\sigma}$ — известные линейные формы относительно $p_{s\sigma}$.

Рассматривая всевозможные числа m, получим ряд определителей $D_1(\varkappa)$, $D_2(\varkappa)$, ..., причем $D_1(\varkappa) = D(\varkappa)$ есть основной определитель. Все остальные определители А. М. Ляпунов назвал *производными*, так что $D_m(\varkappa)$ есть $(m-1)$-й производный определитель. Таким образом, чтобы уравнение (2.24) имело решение вида (2.26), необходимо, чтобы постоянная $\varkappa$ была корнем уравнения (2.26′). Зная все корни определяющего уравнения, можно найти и все корни уравнения (2.26′), так как имеет место следующая теорема, принадлежащая А. М. Ляпунову:

Теорема Ляпунова о производном определителе. *Если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — все корни определяющего уравнения, то все корни уравнения $D_m(\varkappa) = 0$ найдутся по формуле*

$$\varkappa = m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n, \tag{2.27}$$

когда числам m_s будем давать всевозможные целые неотрицательные значения, удовлетворяющие соотношению $\sum\limits_{s=1}^{n} m_s = m$ так, чтобы одна и та же система значений не встречалась более одного раза.

Доказательство: Предположим сначала коэффициенты $p_{s\sigma}$ такими, чтобы корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ определяющего уравнения не удовлетворяли никакому соотношению вида

$$\mu_1\varkappa_1 + \mu_2\varkappa_2 + \ldots + \mu_n\varkappa_n = 0,$$

при целых $\mu_1, \ldots, \mu_n$, для которых

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 0, \quad |\mu_s| \leqslant m \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

и между которыми по крайней мере некоторые не равны нулю.

Тогда величины $\varkappa_s$, определяемые по формуле (2.27), будут все различными и число их будет равно N. Мы предположим, сверх того, что между ними нет равной нулю.

Обращаясь теперь к уравнению (2.24), заметим, что на основании общей теории линейных уравнений с частными производными первого порядка всякая функция от n независимых между собою интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{1n}x_n} = \frac{dx_2}{p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \ldots + p_{2n}x_n} = \\ = \frac{dx_n}{p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \ldots + p_{nn}x_n} = \frac{dV}{\varkappa V}, \tag{2.27′}$$

приравненная какой-либо постоянной, даст нам некоторый интеграл уравнения (2.24).

Обозначая поэтому через $v_1, \ldots, v_n$ левые части упомянутых интегралов этой системы, а через Φ некоторую их функцию, напишем некоторый интеграл уравнения (2.24) в виде

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 1.$$

Если же функцию Φ выбрать так, чтобы уравнение $\Phi = 1$ было разрешимо относительно V, то, определяя V, получим нужное решение уравнения (2.24).

Чтобы найти интегралы системы (2.27′), положим

$$\frac{dV}{\varkappa V} = dt.$$

Тогда система (2.27′) приведется к виду

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n.$$

Так как при сделанных предположениях все $\varkappa_s$ различны, то независимые между собой интегралы написанной системы имеют вид (см. § 3 главы первой):

$$v_s = e^{-\varkappa t}(\bar{K}_{1s}x_1 + \bar{K}_{2s}x_2 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n) = a_s,$$

где $\bar{K}_{\sigma, s}$ суть некоторые постоянные, зависящие от коэффициентов $p_{s\sigma}$, а a_s — произвольные постоянные.

Положим теперь

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1^{m_1} v_2^{m_2} \ldots v_n^{m_n},$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, дающие в сумме m. Тогда уравнение $\Phi = 1$ напишется в виде

$$e^{-(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n)\,t} \prod_{s=1}^{n} (\bar{K}_{1s}x_1 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n)^{m_s} = 1.$$

Так как $t = \frac{1}{\varkappa}\ln V$, то это уравнение приведем к следующей форме:

$$V^{\frac{m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n}{\varkappa}} = \prod_{s=1}^{n} (\bar{K}_{1s}x_1 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n)^{m_s}.$$

Поэтому, если постоянную $\varkappa$ определим формулой (2.27), то искомое решение для V представится в виде

$$V = \prod_{s=1}^{n} (\bar{K}_{1s}x_1 + \bar{K}_{2s}x_2 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n)^{m_s},$$

и очевидно, что эта V есть целая однородная функция величин x_s степени m.

Но выше было показано, что уравнение (2.24) допускает решение в виде целой однородной функции степени m от величин x_s только в том случае, когда постоянная $\varkappa$ есть корень уравнения $D_m(\varkappa) = 0$. Отсюда следует, что сумма

$$m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n$$

при любых неотрицательных значениях m_s, сумма которых есть m, есть действительно корень этого уравнения.

Но число всевозможных неотрицательных значений чисел m_s, дающих в сумме m, как раз равно числу N, т. е. степени уравнения $D_m(\varkappa) = 0$. Следовательно, все величины $\varkappa$, определяемые по формуле (2.27), суть корни уравнения $D_m(\varkappa) = 0$, и никакие другие значения $\varkappa$ ему удовлетворять не могут.

Поэтому при сделанных выше допущениях теорема Ляпунова доказана.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы вообще, достаточно теперь только заметить, что исключенные нами случаи можно рассматривать как предельные для только что рассмотренного. Особенность этих случаев будет поэтому состоять только в том, что уравнение $D_m(\varkappa) = 0$ будет иметь кратные или равные нулю корни.

Перейдем теперь к рассмотрению теорем, дающих возможность находить некоторые формы величин x_s, которые далее будут использованы как функции V для решения задачи об устойчивости в одном важном частном случае общей проблемы.

Теорема 1. *Если корни $\varkappa_s$ определяющего уравнения таковы, что при данном целом положительном m для них невозможны никакие соотношения вида $m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n = 0$, в которых все m_s были бы целыми неотрицательными числами, дающими в сумме m, то всегда возможно найти, и притом только одну, форму V степени m, удовлетворяющую уравнению*

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = U \tag{2.28}$$

при произвольно заданной форме U той же степени m.

В самом деле, разыскивая форму V в виде (2.26), получим для определения ее коэффициентов $A^{(m_1, \ldots, m_n)}$ систему линейных неоднородных уравнений, число которых N равно числу этих коэффициентов. Легко убедиться, что определитель этой системы есть $D_m(0)$ и, следовательно, по условиям теоремы не равен нулю. Поэтому неоднородная система, определяющая $A^{(m_1, \ldots, m_n)}$, имеет единственное решение, и теорема доказана.

Заметим, что условие, рассматриваемое в теореме, будет, например, выполнено, и притом для любого m, когда вещественные части всех $\varkappa_s$ отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

В следующих трех теоремах будем считать все $p_{s\sigma}$ постоянными вещественными числами, а также будем предполагать вещественными все величины x_s, будем ли их рассматривать как независимые переменные или как функции t, удовлетворяющие линейным дифференциальным уравнениям вида (1.36).

Теорема 2. *Когда вещественные части всех корней $\varkappa_s$ определяющего уравнения отрицательны и когда в уравнении (2.28) U есть знакоопределенная форма какой-либо четной степени m, то удовлетворяющая этому уравнению форма m-й степени V будет также знакоопределенной, и притом противоположной по знаку с U.*

Для доказательства заметим прежде, что так как при условии теоремы $D_m(0) \neq 0$, то существует единственная форма V m-й степени, удовлетворяющая уравнению (2.28), и остается доказать, что она знакоопределенна и что $VU < 0$.

Пусть $x_s^{(0)}$ — произвольно выбранные вещественные числа, и обозначим соответствующее значение V через V_0.

Рассмотрим теперь x_s как функции t, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2.28'}$$

и принимающие при $t = t_0$ значения $x_s^{(0)}$.

При этих условиях V также будет функцией t, принимающей при $t = t_0$ значение V_0 и удовлетворяющей в силу (2.28) соотношению $V' = U$, откуда следует, что V — монотонная функция, возрастающая при $U > 0$ и убывающая при $U < 0$.

Но если все корни $\varkappa_s$ определяющего уравнения имеют отрицательные вещественные части, то (как следует из общих формул (1.46') главы I) все решения системы (2.28') стремятся к нулю при $t \to +\infty$ при любых $x_s^{(0)}$. Поэтому V, как функция t, также стремится к нулю при $t \to +\infty$, а так как V — монотонная функция, то при $U > 0$ имеем $V < 0$, а при $U < 0$, наоборот, $V > 0$.

А так как $x_s^{(0)}$ — произвольно взятые, не равные одновременно нулю числа, то функция V, удовлетворяющая уравнению (2.28), обращаясь в нуль, когда все x_s равны нулю, при всяких других значениях x_s имеет не равное нулю значение противоположного знака с U. Таким образом, теорема доказана. Подобным же образом докажется и следующая

Теорема 3. *Если между корнями $\varkappa_s$ определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, и если при данном четном m корни эти удовлетворяют условию теоремы 1, то всякий раз, когда в уравнении (2.28) U*

есть знакоопределенная форма m-й степени, удовлетворяющая этому уравнению форма той же степени V, наверно, не будет знакопостоянной противоположного знака с U.

Так же как и выше, рассматриваем x_s как функции t, удовлетворяющие системе (2.28′) с начальными условиями $x_s^{(0)}$.

Следовательно, опять V — монотонная функция, возрастающая при $U > 0$ и убывающая при $U < 0$. Поэтому, если $x_s^{(0)}$ можно выбрать так, чтобы было $V_0 = 0$, то для $t > t_0$ V будет принимать только положительные значения, если $U > 0$, и только отрицательные, если $U < 0$.

Стало быть, если надлежащим выбором x_s, не равных одновременно нулю, V можно сделать нулем, то ее можно также сделать и величиной одинакового знака с U. Поэтому, если бы V не могла получать значений того же знака, что и U, то она необходимо была бы знакоопределенной.

Но тогда такая функция удовлетворила бы всем условиям теоремы 2 § 2, и нулевое решение системы (2.28′) было бы асимптотически устойчивым. А это невозможно, так как если уравнение (2.25) имеет корни с положительными вещественными частями, то (как следует опять из формул (1.46′)) среди решений системы (2.28′) всегда найдутся такие, в которых по крайней мере некоторые из функций x_s будут неограниченно расти при $t \to +\infty$. Полученное противоречие показывает, что V обязательно должна получать значения того же знака, какой имеет U. Следовательно, теорема доказана.

Легко притом доказать, что если все корни определяющего уравнения имеют положительные вещественные части, то функция V, удовлетворяющая уравнению (2.28), наверное будет знакоопределенной, одинакового знака с U.

Дополнением к предыдущим теоремам является следующая

Теорема 4. *Если между корнями $\varkappa_s$ определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, то, разумея под U заданную знакоопределенную форму четной степени m и под γ положительную постоянную, не являющуюся корнем уравнения $D_m(\varkappa) = 0$, всегда найдем, и притом только одну, форму V той же степени m, удовлетворяющую уравнению*

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \gamma V + U. \qquad (2.29)$$

Притом γ можно выбрать так, что найденная форма V, наверно, не будет знакопостоянной, противоположного знака с U.

Действительно, разыскивая форму V в виде (2.26), мы получим для определения ее коэффициентов систему линейных неоднородных уравнений, определитель которой есть $D_m(\gamma)$.

По условию теоремы $D_m(\gamma) \neq 0$, и поэтому форма V найдется единственным образом. Применяя далее к V теорему Эйлера об однородных функциях, можем написать

$$\sum_{s=1}^{n} x_s \frac{\partial V}{\partial x_s} = mV,$$

а поэтому V, удовлетворяющая уравнению (2.29), будет также удовлетворять следующему:

$$\sum_{s=1}^{n} \left[p_{s1}x_1 + \ldots + \left(p_{ss} - \frac{\gamma}{m}\right)x_s + \ldots + p_{sn}x_n\right] \frac{\partial V}{\partial x_s} = U. \quad (2.29')$$

Поэтому по предыдущей теореме заключаем, что если γ такова, что между корнями уравнения

$$\left| p_{s\sigma} - 1_s^\sigma \left(\frac{\gamma}{m} + \chi\right) \right| = 0$$

имеются такие, вещественные части которых положительны, то форма V, наверно, не будет знакопостоянной, противоположного знака с U. Но, полагая $\frac{\gamma}{m} + \chi = \varkappa$, мы приведем последнее уравнение к виду $D(\varkappa) = 0$, среди корней которого по условию есть такие, вещественные части которых положительны.

Отсюда следует, что γ всегда возможно выбрать настолько малой, что между величинами $\chi_s = \varkappa_s - \frac{\gamma}{m}$ всегда найдется хотя бы одна с положительной вещественной частью.

Следовательно, теорема доказана.

2. Теперь мы можем доказать основные теоремы Ляпунова, устанавливающие случаи, в которых задача об устойчивости установившегося движения приводится к исследованию корней некоторого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами.

Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения приводятся к виду

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}x_\sigma + \bar{X}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (2.30)$$

где все $p_{s\sigma}$ — вещественные постоянные, а $\bar{X}_s$ — не зависящие от времени голоморфные функции от x_σ, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

В этом случае невозмущенное движение (нулевое решение написанных уравнений) будем называть, следуя Ляпунову, *установившимся* (стационарным, равновесным — по другой терминологии).

Коэффициенты разложений функций $\bar{X}_s$ во многих случаях могут быть не только постоянными, но вообще, любыми непрерывными функциями времени. В последнем случае мы будем называть невозмущенное *движение установившимся в первом приближении.*

Если мы отбросим в уравнениях (2.30) все члены порядка выше первого, то получим систему линейных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.30'}$$

с постоянными коэффициентами, которые называются по Ляпунову *уравнениями первого приближения* (уравнения в вариациях — по терминологии Пуанкаре). Для этой системы уравнение

$$D(\varkappa) = \left| p_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa \right| = 0 \tag{2.31}$$

является *определяющим* (характеристическим) уравнением и есть уравнение n-й степени с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим основные теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости установившегося движения.

Теорема 1. *Если определяющее уравнение имеет корни только с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически, каковы бы ни были функции $\bar{X}_s$ в уравнениях возмущенного движения.*

Доказательство весьма просто и является следствием теоремы 2 предыдущего раздела. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2. \tag{2.32}$$

По упомянутой теореме найдется единственная квадратичная форма V, удовлетворяющая этому уравнению, которая будет знакоопределенно отрицательной. Принимая найденную форму за функцию Ляпунова, найдем в силу уравнений (2.30)

$$V' = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s}, \tag{2.32'}$$

что есть, очевидно, знакоопределенно положительная функция.

Таким образом найденная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы об асимптотической устойчивости, а следовательно, невозмущенное движение устойчиво асимптотически, что и нужно было доказать. Поэтому всякое возмущенное движение, для которого начальные возмущения численно достаточно малы, будет неограниченно приближаться к невозмущенному, когда $t \to +\infty$.

Заметим еще, что, полагая все $\bar{X}_s$ равными нулю, получим также доказательство асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.30′), что может быть также выведено из общих формул (1.46′) главы I, дающих общее решение системы с постоянными коэффициентами.

Теорема 2. *Если между корнями определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, то невозмущенное движение неустойчиво, каковы бы ни были функции $\bar{X}_s$ в уравнениях возмущенного движения.*

Переходя к доказательству, допустим сначала, что корни определяющего уравнения таковы, что определитель $D_2(0) \neq 0$. Тогда по-прежнему найдется единственная квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению (2.32), но в этом случае найденная функция V, по теореме 3 предыдущего раздела, будет такова, что надлежащим выбором x_s ее можно сделать величиной положительной. Принимая эту форму за функцию Ляпунова, для ее производной V' опять получим выражение (2.32′), а поэтому найденная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы 3 § 2, и невозмущенное движение неустойчиво.

Если корни уравнения (2.31) таковы, что $D_2(0) = 0$, то вместо уравнения (2.32) возьмем следующее:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \gamma V + x_1^2 + \ldots + x_n^2, \qquad (2.33)$$

где γ — положительная постоянная.

На основании теоремы 4 раздела 1 γ всегда можно выбрать так, чтобы $D_2(\gamma)$ не было равно нулю и чтобы квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению (2.33), не была знакопостоянной положительной. Принимая опять эту форму за функцию Ляпунова, найдем в силу уравнений (2.30)

$$V' = \gamma V + x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s}. \qquad (2.33')$$

Следовательно, найденная функция V удовлетворяет всем условиям 4-й теоремы второго метода Ляпунова, и рассматриваемая теорема доказана полностью.

Так же как и выше, отметим, что, полагая $\bar{X}_s \equiv 0$, мы имеем доказательство неустойчивости нулевого решения системы (2.30′), что также можно вывести из формул (1.46′) главы I.

Заметим еще, что если в с е корни уравнения (2.31) имеют положительные вещественные части, то невозмущенное движение будет абсолютно неустойчивым.

Примечание 1. Рассмотренные два основных случая таковы, что в каждом из них задача об устойчивости невозмущенного движения и задача об устойчивости нулевого решения системы (2.30′) решаются одновременно в одном и том же смысле. Такие случаи называют, следуя Ляпунову, *обыкновенными*, и в этих случаях решение задачи об устойчивости сводится просто к исследованию корней определяющего уравнения. Все остальные случаи задачи об устойчивости установившегося движения называются *особенными*.

Таким образом, особенные случаи характеризуются тем, что в каждом из них определяющее уравнение (2.31), не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни, вещественные части которых равны нулю, т. е. нулевые и чисто мнимые корни.

Особенные случаи интересны еще тем, что только в таких случаях (и притом когда все корни определяющего уравнения равны нулю или чисто мнимы) задача об устойчивости может иметь одно и то же решение и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

В обыкновенных же случаях из асимптотической устойчивости при $t \to +\infty$ следует абсолютная неустойчивость при $t \to -\infty$, и наоборот.

«Двусторонняя» устойчивость возможна, следовательно, для случая, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму с характеристической функцией, не зависящей от времени, и когда все корни определяющего уравнения имеют равные нулю вещественные части.

Примечание 2. В предыдущих теоремах можно было бы взять вместо $U = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ любую знакоопределенную форму четной степени. Но тогда функцию V также нужно искать в виде формы той же степени, что всегда возможно.

3. Как было сказано, обыкновенные случаи задачи об устойчивости установившегося движения характерны тем, что в этих случаях достаточно рассматривать только уравнения первого приближения. В особенных же случаях рассмотрение первого приближения оказывается недостаточным и требуется принимать во внимание члены высших порядков в разложениях функций X_s.

В первом приближении исследуемое движение может оказаться устойчивым или неустойчивым *), но этот результат

*) Это вытекает из анализа общего решения (1.46′) системы уравнений первого приближения. А именно, нулевое решение системы (2.30′) будет устойчиво, если каждому корню уравнения (2.31), вещественная часть которого равна нулю, соответствует столько же групп решений, какова кратность этого корня. Например, будем иметь устойчивость, если все корни, вещественные части которых равны нулю, оказываются простыми. Наоборот, если число групп такого корня меньше его кратности, то нулевое решение будет неустойчивым.

нельзя распространять без особого исследования на полную систему (2.30).

Чтобы показать это, рассмотрим следующую теорему, также принадлежащую А. М. Ляпунову:

Теорема. *Если определяющее уравнение* $D(\varkappa)=0$, *не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни, вещественные части которых равны нулю, то функции* $\bar{X}_s$ *в уравнениях* (2.30) *всегда можно подбирать так, чтобы невозмущенное движение было устойчивым или неустойчивым, по желанию.*

Для доказательства рассмотрим сначала частные случаи. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1=\bar{X}_1,$$

$$\dot{x}_s=x_{s-1}+\bar{X}_s \qquad (s=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае все корни определяющего уравнения равны нулю и что нулевое решение уравнений первого приближения неустойчиво.

Рассмотрим теперь функции $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$, определяемые последовательно (для $s=n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1$) из уравнений

$$\varphi_s=x_s^2+\varphi_{s+1}^2$$

при условии $\varphi_{n+1}=0$. Положим $V=\varphi_1$, где φ_1 по построению есть знакоопределенно положительная функция.

Если $\bar{X}_s$ определить формулами

$$\bar{X}_s=-2x_{s+1}\varphi_{s+1}+x_s\Phi_s,$$

то в силу заданных уравнений мы найдем

$$V'=2x_1^2\Phi_1+2^2x_2^2\varphi_2\Phi_2+\ \ldots\ +2^nx_n^2\varphi_2\ \ldots\ \varphi_n\Phi_n,$$

откуда по теоремам второго метода следует, что если взять все Φ_s знакоопределенно отрицательными, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво; если взять все Φ_s равными нулю, то имеем простую устойчивость, а если взять все Φ_s знакоопределенно положительными, то невозмущенное движение будет неустойчивым.

Пусть теперь уравнения возмущенного движения даны в виде

$$\dot{x}_1=-\lambda y_1+\bar{X}_1,\quad \dot{x}_s=-\lambda y_s+x_{s-1}+\bar{X}_s,$$

$$\dot{y}_1=+\lambda x_1+\bar{Y}_1,\quad \dot{y}_s=+\lambda x_s+y_{s-1}+\bar{Y}_s$$

$$(s=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

где λ — положительная постоянная. Легко убедиться в том, что в этом случае все корни определяющего уравнения чисто мнимые и что невозмущенное движение неустойчиво. Построим и здесь функции φ_s, определяемые последовательно формулам

$$\varphi_s = x_s^2 + y_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условии $\varphi_{n+1} = 0$. Беря $V = \varphi_1$ (φ_1 и здесь знакоопределенно положительная) и полагая

$$\bar{X}_s = -2x_{s+1}\varphi_{s+1} + x_s\Phi_s, \quad \bar{Y}_s = -2y_{s+1}\varphi_{s+1} + y_s\Phi_s$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

мы найдем в силу заданных уравнений

$$V' = 2(x_1^2 + y_1^2)\Phi_1 + 2^2(x_2^2 + y_2^2)\varphi_2\Phi_2 + \ldots$$
$$\ldots + 2^n(x_n^2 + y_n^2)\varphi_2 \ldots \varphi_n\Phi_n.$$

откуда, так же как и выше, следует, что невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, просто устойчиво или неустойчиво, в зависимости от того, будут ли все Φ_s определенно отрицательными, равными нулю или определенно положительными.

Обращаясь теперь к общему случаю, Ляпунов замечает, что, каковы бы ни были $p_{s\sigma}$, всегда найдется линейная подстановка с постоянными вещественными коэффициентами, преобразующая систему (2.30) в такую, которая распадается на группы уравнений, принадлежащие к одному из двух следующих типов:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\lambda y_1 + \bar{Y}_1, \\ \dot{y}_i &= -\lambda y_i + y_{i-1} + \bar{Y}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, k) \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\lambda y_1 - \mu z_1 + \bar{Y}_1, \\ \dot{y}_i &= -\lambda y_i - \mu z_i + y_{i-1} + \bar{Y}_i, \\ \dot{z}_1 &= \mu y_1 - \lambda z_1 + \bar{Z}_1, \\ \dot{z}_i &= \mu y_i - \lambda z_i + z_{i-1} + \bar{Z}_i, \end{aligned}\right| \tag{2.34'}$$

где $-\lambda$ обозначает вещественную часть корня уравнения (2.31).

Здесь не исключается и случай $k = 1$, когда группа вида (2.34) приводится к одному первому уравнению, а группа вида (2.34′) — к двум уравнениям первой строки. Поэтому, если определяющее уравнение не имеет корней с положительными вещественными частями, то в уравнениях вида (2.34) или (2.34′) λ есть либо положительное число, либо нуль.

Тогда, чтобы сделать невозмущенное движение устойчивым или неустойчивым, стоит только во всех группах, для которых

$\lambda > 0$, а также в тех, для которых $k = 1$, положить $\bar{Y}_s = \bar{Z}_s = 0$, и в группах, для которых $\lambda = 0$, $k > 1$, функции $\bar{Y}_s$, $\bar{Z}_s$ выбрать так, как было показано в двух рассмотренных частных случаях. Этим теорема доказывается полностью.

4. Рассмотрим в заключение случай, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_s}, \\ \frac{dy_s}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

где характеристическая функция не зависит от времени и представляется в виде ряда с постоянными вещественными коэффициентами:

$$H = H_2 + H_3 + \ldots + H_m + \ldots, \tag{2.35'}$$

где H_m обозначает форму m-й степени от переменных x_s и y_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), причем H_2 имеет вид (1.48) главы I.

Тогда уравнения первого приближения, которые получим, заменяя в (2.35) функцию H формой H_2, имеют вид (1.47), а соответствующее им определяющее уравнение содержит только четные степени $\varkappa$, и каждому его корню $\varkappa_s$ соответствует корень $-\varkappa_s$. Следовательно, если определяющее уравнение имеет корни с не равными нулю вещественными частями, то среди этих корней обязательно будут корни с положительными вещественными частями и невозмущенное движение будет заведомо *неустойчиво*.

Отсюда следует, что для устойчивости невозмущенного движения, определяемого уравнениями (2.35), *необходимо*, чтобы *все корни* определяющего уравнения имели равные нулю вещественные части. Однако это необходимое условие вовсе не является достаточным, как это следует из предыдущей теоремы.

Поэтому все случаи, когда возможна устойчивость, принадлежат к разряду особенных и для них без дополнительного исследования задачу об устойчивости разрешить нельзя.

Это дополнительное исследование делается ненужным в том случае, когда H_2 есть знакоопределенная квадратичная форма. Действительно, тогда, по крайней мере при достаточно малых $|x_s|$, $|y_s|$, характеристическая функция H есть знакоопределенная функция и ее можно взять за функцию Ляпунова. Но, полагая $V = H$, мы найдем в силу уравнений (2.34) $V' = 0$, откуда следует (по первой теореме второго метода Ляпунова), что *невозмущенное движение устойчиво*. А отсюда, наоборот, вытекает, что в этом случае все корни определяющего уравнения заведомо будут иметь равные нулю вещественные части *).

Заметим еще, что функция H может быть знакоопределенной и при $H_2 = 0$, лишь бы первая, не равная нулю форма H_m в ее разложении была знакоопределенной формой некоторой четной степени.

Полезно заметить еще, что если невозмущенное движение устойчиво, то оно устойчиво в обе стороны, т. е. и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, что следует из того, что уравнения (2.35) не изменяют своей формы при замене t на $-t$.

Уравнения тех задач небесной механики, которые будут рассматриваться в этой книге, все имеют каноническую форму, и решение задач об устойчивости также будет приводиться к задаче об устойчивости нулевого решения канонической системы. Поэтому решение этих задач весьма затруднительно и ответ на поставленный вопрос об устойчивости решается почти исключительно в отрицательном смысле, что, впрочем, также имеет важное значение.

§ 4. Задача об устойчивости периодического движения

1. Если правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1) зависят от времени, то невозмущенное движение $x_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ называется *неустановившимся* (нестационарным — по другой терминологии).

Мы рассмотрим здесь только один важный частный случай задачи об устойчивости неустановившегося движения, когда все функции $X_s(t \mid x_\sigma)$ — периодические функции времени с одним и тем же вещественным периодом ω.

В этом случае мы будем называть невозмущенное движение *периодическим*.

Допустим, что уравнения (2.1) могут быть написаны в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma + \overline{X}_s(t \mid x_\sigma), \tag{2.36}$$

где все $p_{s\sigma}(t)$ — вещественные периодические функции от t с периодом ω, а $\overline{X}_s$ — голоморфные функции от x_σ, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают периодическими коэффициентами с тем же самым периодом ω.

Рассмотрим сначала задачу об устойчивости в первом приближении, т. е. задачу об устойчивости нулевого решения

*) Но определяющее уравнение канонической системы может иметь все корни с нулевыми вещественными частями и в том случае, когда форма H_2 не является знакоопределенной.

системы

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.36'}$$

линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть ρ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — корни характеристичного уравнения (1.51′), которое можно написать также в виде (1.55), причем среди этих корней могут быть и равные.

Если положить вообще $\rho_s = \alpha_s + i\beta_s\,(i = \sqrt{-1})$, то характеристические показатели $\varkappa_s = \frac{1}{\omega}\ln\rho_s$ представятся в виде

$$\varkappa_s = \frac{1}{\omega}\left\{\ln\sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2} + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta_s}{\alpha_s}\right\},$$

откуда следует, что при $|\rho_s| < 1$ $R(\varkappa_s) < 0$, при $|\rho_s| > 1$ $R(\varkappa_s) > 0$, а если $|\rho_s| = 1$, то $R(\varkappa_s) = 0$ и соответствующий характеристический показатель есть либо нуль, либо чисто мнимое число.

Рассмотрим теперь формулы (1.54), представляющие общее решение системы вида (2.36′), где $f_{s\sigma}(t)$ — либо непрерывные периодические функции с периодом ω, либо многочлены относительно t, коэффициенты которых — непрерывные периодические функции с тем же периодом.

Тогда вопрос об устойчивости нулевого решения системы (2.36′) решается рассмотрением величин ρ_s или характеристических показателей $\varkappa_s$.

В самом деле, если характеристичное уравнение имеет только корни, *модули которых меньше единицы*, то вещественные части всех $\varkappa_s$ будут отрицательны и все функции x_s, определяемые формулами (1.54), будут приближаться к нулю, когда $t \to +\infty$, каковы бы ни были значения произвольных постоянных C_s или начальных возмущений $x_s^{(0)}$. Поэтому в этом случае нулевое решение системы (2.36′) *устойчиво асимптотически* (при $t \to +\infty$).

Если характеристичное уравнение имеет корни, *модули которых более единицы*, то некоторые из $\varkappa_s$ будут иметь положительные вещественные части, и стало быть, при произвольных начальных возмущениях $x_s^{(0)}$ среди функций x_s, удовлетворяющих уравнениям (2.36′), обязательно найдутся такие, которые будут неограниченно расти при $t \to +\infty$.

Следовательно, в этом случае нулевое решение системы (2.36′) *будет неустойчивым* и эта неустойчивость будет к тому же абсолютной, если модули *всех* ρ_s больше единицы.

Иллюстрацией задачи об устойчивости, когда уравнения возмущенного движения обладают периодическими коэффициентами, может служить пример, приведенный в конце раздела 2 § 2. В этом случае, как мы видели, нулевое решение устойчиво, а характеристические показатели суть нуль и -1.

2. Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании системы уравнений с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами. Поставим сначала вопрос несколько шире. Пусть дана произвольная линейная система

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma, \tag{2.37}$$

где все $p_{s\sigma}$ — непрерывные ограниченные функции для всякого значения t.

Введем вместо x_s новые неизвестные z_s посредством линейной подстановки с переменными коэффициентами

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} l_{s\sigma}(t)\, z_\sigma, \tag{2.38}$$

где матрица преобразования $L = \| l_{s\sigma} \|$ обладает следующими свойствами:

A) $L(t)$ имеет для всякого t непрерывную производную $\dot{L}(t) = \| \dot{l}_{s\sigma}(t) \|$;

B) $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены для всякого t;

C) существует такая постоянная m, что для всякого t имеем неравенство $0 < m \leqslant \operatorname{mod} |L(t)|$.

Преобразование (2.38), матрица которого удовлетворяет перечисленным условиям, называется *преобразованием Ляпунова*, а соответствующая матрица $L(t)$ — матрицей Ляпунова.

Если, в частности, $L = \mathrm{const}$ и $|L| \neq 0$, то матрица L удовлетворяет приведенным условиям, а поэтому неособенное преобразование с постоянными коэффициентами всегда есть преобразование Ляпунова.

Легко проверить затем, что из свойств матрицы $L(t)$ следует, что существует обратная матрица $L^{-1}(t)$ и что она обладает теми же свойствами, что и $L(t)$. Таким образом, преобразование, обратное преобразованию Ляпунова, также есть преобразование Ляпунова.

В результате преобразования Ляпунова система (2.37) преобразуется в следующую:

$$\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(t)\, z_\sigma, \tag{2.39}$$

коэффициенты которой, как нетрудно проверить, также непрерывные и ограниченные функции для всякого t.

Поэтому преобразование Ляпунова устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями систем (2.37) и (2.39), при этом линейно независимые решения остаются таковыми и после преобразования. Следовательно, преобразование Ляпунова переводит интегральную матрицу X первоначальной системы в некоторую интегральную матрицу Z преобразованной системы.

Запишем (2.37), (2.38) и (2.39) в матричной форме:

$$\dot{X} = P(t)\, X, \tag{2.37'}$$

$$X = L(t)\, Z, \tag{2.38'}$$

$$\dot{Z} = Q(t)\, Z, \tag{2.39'}$$

где $P(t) = \| p_{s\sigma}(t) \|$ и $Q(t) = \| q_{s\sigma}(t) \|$.

Подставляя теперь выражение для X из (2.38′) в уравнение (2.37′), мы имеем

$$\dot{L}Z + L\dot{Z} = PLZ,$$

что в силу (2.39′) приводится к виду

$$\dot{L}Z + LQZ = PLZ,$$

откуда получаем

$$Q = L^{-1}PL - L^{-1}\dot{L}. \tag{2.40}$$

Две системы (2.37) и (2.39), или, что то же, (2.37′) и (2.39′), называют *равносильными* (эквивалентными) в смысле Ляпунова, если они переводятся друг в друга преобразованием Ляпунова. Матрицы коэффициентов P и Q двух равносильных систем всегда связаны формулой (2.40), где матрица L есть матрица Ляпунова.

Равносильные в смысле Ляпунова системы обладают следующим важным свойством, вытекающим из свойств матрицы L:

Задачи об устойчивости нулевого решения двух равносильных в смысле Ляпунова систем решаются всегда в одном и том же смысле, так что если решение $z_s = 0$ системы (2.39) *устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво, то таким же свойством обладает и нулевое решение $x_s = 0$ системы* (2.37), *и наоборот.*

Это следует из формул преобразования (2.38) и из формул обратного преобразования, которые можно написать в виде

$$z_s = \sum_{\sigma=1}^{n} \bar{l}_{s\sigma} x_\sigma, \tag{2.38''}$$

где все $\bar{l}_{s\sigma}$ — непрерывные и ограниченные функции.

В самом деле, пусть нулевое решение системы (2.39) асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$, т. е. пусть $\lim\limits_{t \to +\infty} z_s = 0$. Тогда из (2.38″) немедленно находим $\lim\limits_{t\to+\infty} x_s=0$, что означает, что нулевое решение системы (2.37) тоже асимптотически устойчиво при $t\to+\infty$. Аналогично проверяются утверждения относительно простой устойчивости и неустойчивости.

Может случиться, что для данной системы (2.37) возможно подобрать такую матрицу Ляпунова $L(t)$, что матрица Q преобразованной системы окажется постоянной, так что система (2.39) будет системой с постоянными коэффициентами. Тогда, следуя Ляпунову, первоначальную систему называют *приводимой*. Ясно, что если для приводимой системы известна матрица Ляпунова, то такая система немедленно интегрируется.

Действительно, пусть (2.37) есть приводимая система. Тогда существует такое преобразование Ляпунова (2.39), которое переводит систему (2.37), или, что то же, систему (2.37′), в систему

$$\dot{Z}=QZ, \tag{2.41}$$

где через Q мы обозначили постоянную матрицу.

Но частное решение системы (2.41) имеет, очевидно, вид

$$Z^*=e^{Qt},$$

где e^{Qt} — экспоненциальная матрица. Поэтому частное решение системы (2.37′) напишется в виде

$$X^*=L(t)\,e^{Qt}.$$

Покажем теперь, что всякая система (2.37), все коэффициенты которой — непрерывные периодические функции t с общим периодом ω, является приводимой.

Согласно условию матрица P системы (2.37) периодическая, т. е. мы имеем

$$P(t+\omega)=P(t). \tag{2.42}$$

Заменяя в системе (2.37′) t на $t+\omega$ и используя равенство (2.42), мы получим

$$\dot{X}(t+\omega)=P(t)\,X(t+\omega).$$

Таким образом, $X(t+\omega)$ также есть интегральная матрица системы (2.37′), а поэтому мы имеем

$$X(t+\omega)=X(t)\,A, \tag{2.43}$$

где A — некоторая постоянная матрица, определитель которой $|A|$ не равен нулю. Следовательно, можно написать

$$A^{\frac{t}{\omega}}=e^{\frac{t}{\omega}\ln A}.$$

Легко видеть, что при замене t на $t+\omega$ эта матрица, так же как и X, получает справа множитель A.

Поэтому матрица, определяемая формулой

$$L(t)=X(t)A^{-\frac{t}{\omega}}=X(t)e^{-\frac{t}{\omega}\ln A}, \tag{2.44}$$

удовлетворяет условию

$$L(t+\omega)=L(t),$$

т. е. является непрерывной периодической функцией от t с периодом ω, определитель которой $|L(t)|$ отличен от нуля. Стало быть, матрица $L(t)$ удовлетворяет условиям A), B), C) и, следовательно, является матрицей Ляпунова.

Но из (2.44) выведем, что решение X системы (2.37′) можно представить в виде

$$X(t)=L(t)e^{\frac{\ln A}{\omega}t}=L(t)e^{Qt}, \tag{2.45}$$

где $Q=\frac{1}{\omega}\ln A$ — постоянная матрица, откуда следует, что система (2.37) с периодическими коэффициентами п р и в о д и м а.

Поэтому преобразование Ляпунова с периодическими коэффициентами приведет систему (2.37′) к системе (2.41) с постоянными коэффициентами, что и требовалось доказать.

К сожалению, мы не имеем никакого общего способа, который позволил бы найти матрицу $L(t)$, приводящую систему с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами, так что доказанное свойство имеет главным образом теоретическое значение.

Важнейшим из свойств системы с периодическими коэффициентами является зависимость между корнями характеристичного уравнения и корнями определяющего уравнения приведенной системы. Пусть $A=\|a_{ij}\|$ есть постоянная матрица, на которую умножается интегральная матрица первоначальной линейной системы (2.37) с периодическими коэффициентами $p_{s\sigma}$.

Тогда характеристичное уравнение этой системы имеет вид

$$\|a_{ij}\|-\rho E=0, \tag{2.46}$$

и его корни обозначим, как и ранее, через ρ_s.

При помощи преобразования Ляпунова (2.38) с периодическими коэффициентами система (2.37) переводится в систему (2.39) с постоянными коэффициентами $q_{s\sigma}$, определяющее уравнение которой напишется следующим образом:

$$\|q_{ij}\|-\varkappa E=0, \tag{2.46′}$$

корни которого обозначим через $\varkappa_s$.

Так как

$$Q = \frac{1}{\omega} \ln A, \tag{2.47}$$

то мы имеем

$$\varkappa_s = \frac{1}{\omega} \ln \rho_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.47'}$$

т. е. корни определяющего уравнения приведенной системы совпадают с характеристическими показателями первоначальной системы с периодическими коэффициентами, что мы и хотели показать.

3. Теперь мы можем доказать основные теоремы Ляпунова, относящиеся к проблеме устойчивости периодического движения.

Вернемся для этого к уравнениям возмущенного движения (2.36), правые части которых — периодические функции от t с одним и тем же периодом ω.

Преобразуем систему (2.36) при помощи преобразования Ляпунова (формулы (2.38) или (2.38′)), причем матрицу преобразования L определим формулой (2.44).

Тогда система (2.36) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} z_\sigma + Z_s(t \mid z_\sigma), \tag{2.48}$$

где все $q_{s\sigma}$ — постоянные коэффициенты, матрица которых Q определяется формулой (2.47), а все $Z_s(t|z_\sigma)$ (в силу линейности сделанного преобразования) — голоморфные функции величин z_s, разложения которых начинаются членами не ниже второй степени и обладают ограниченными периодическими коэффициентами *).

Из свойств преобразования Ляпунова вытекает (так же как и для линейных систем), что задачи об устойчивости системы (2.36) и системы (2.48) решаются в одинаковом смысле, что и позволяет доказать следующие теоремы Ляпунова:

Теорема 1. *Если характеристичное уравнение* (2.46) *имеет только корни, модули которых менее единицы, то невозмущенное движение устойчиво, и притом асимптотически, каковы бы на были совокупности членов высших порядков* $X_s(t|x_\sigma)$.

---

*) Мы предполагаем, что функции $X_s(t|x_\sigma)$ в уравнениях (2.36) — голоморфные функции, коэффициенты разложений которых — периодические функции. Однако теорема остается справедливой и при более общих предположениях. Например, коэффициенты разложений могут быть какими угодно ограниченными функциями времени.

В самом деле, из условий теоремы следует, что все корни уравнения (2.46′) будут иметь отрицательные вещественные части, вследствие чего найдется единственная квадратичная форма $V(z_\sigma)$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющая уравнению (см. § 3 этой главы)

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+\ldots+q_{sn}z_n)\frac{\partial V}{\partial z_s}=\sum_{s=1}^{n}z_s^2, \tag{2.49}$$

и это форма будет заведомо знакоопределенной отрицательной.

Беря найденную форму за функцию Ляпунова, имеем в силу уравнений (2.48)

$$V'=\sum_{s=1}^{n}z_s^2+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial z_s}Z_s, \tag{2.49′}$$

что есть знакоопределенная положительная функция по крайней мере в достаточно малой окрестности начала координат.

Поэтому заключаем, на основании теоремы второй прямого метода Ляпунова, что нулевое решение системы (2.48) устойчиво асимптотически.

А поэтому невозмущенное движение, т. е. нулевое решение системы (2.36), в силу обратного преобразования (2.38′), также асимптотически устойчиво, и теорема доказана.

Подобным же образом докажется и вторая теорема Ляпунова:

Теорема 2. *Если характеристичное уравнение* (2.46) *имеет корни, модули которых более единицы, то невозмущенное движение неустойчиво, каковы бы ни были совокупности членов высших порядков* $\bar{X}_s(t\,|\,x_\sigma)$.

Действительно, в этом случае определяющее уравнение системы первого приближения (2.46′) обязательно имеет корни, вещественные части которых положительны. Если эти корни таковы, что определитель $D_2(0)\neq 0$, то существует единственная квадратичная форма $V(z_\sigma)$, удовлетворяющая уравнению (2.49), и эта форма, наверное, не будет знакопостоянной отрицательной. Производная V' в силу уравнений (2.48) опять определится формулой (2.49′) и есть знакоопределенная положительная функция в некоторой окрестности начала координат.

Поэтому выполнены все условия теоремы третьей прямого метода Ляпунова, откуда следует неустойчивость нулевого решения системы (2.48), а в силу формул (2.38′) отсюда вытекает также неустойчивость невозмущенного движения.

Если корни определяющего уравнения таковы, что определитель $D_2(0)=0$, то вместо уравнения (2.49) возьмем следующее:

$$\sum_{s=1}^{n} (q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n) \frac{\partial V}{\partial z_s} = \gamma V + \sum_{s=1}^{n} z_s^2, \tag{2.50}$$

где γ — положительная постоянная.

Как мы знаем, эту постоянную можно выбрать так, чтобы $D_2(\gamma) \neq 0$ и чтобы квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению (2.50), не была знакопостоянной положительной. Принимая эту форму за функцию Ляпунова, мы найдем в силу уравнений (2.48)

$$V' = \gamma V + \sum_{s=1}^{n} z_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_s} Z_s, \tag{2.50'}$$

откуда следует, что найденная функция V удовлетворяет условиям четвертой теоремы прямого метода Ляпунова, и нулевое решение системы (2.48) опять неустойчиво. Следовательно, невозмущенное движение также неустойчиво, и теорема доказана в полном объеме.

Таким образом, в рассмотренных двух случаях задача об устойчивости периодического невозмущенного движения решается полностью рассмотрением только уравнений первого приближения, т. е. системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами. А задача об устойчивости нулевого решения линейной системы с периодическими коэффициентами, как было указано выше, приводится к определению характеристических показателей, которые всегда могут быть вычислены, по крайней мере приближенно, с помощью рядов Ляпунова.

Поэтому эти два случая задачи об устойчивости периодического движения Ляпунов также назвал *обыкновенными.*

Все остальные случаи относятся к категории *особенных.* Таким образом, особенными случаями задачи об устойчивости периодического движения будут все те случаи, в которых характеристичное уравнение, не имея корней с модулями, большими единицы, имеет корни, модули которых равны единице.

В этих случаях среди характеристических показателей (т. е. среди корней определяющего уравнения преобразованной системы (2.48)) обязательно будут такие, вещественные части которых равны нулю, и не будет таких, вещественные части которых положительны.

Поэтому задача об устойчивости нулевого решения системы (2.48) не может быть решена рассмотрением одного только первого приближения и существенно зависит от членов высших порядков. А поэтому и задача об устойчивости невозмущенного периодического движения не может быть решена рассмотрением только линейных уравнений и зависит от вида функций $\bar{X}_s(t|x_\sigma)$ в уравнениях (2.36).

Поэтому мы можем для полноты сформулировать сказанное в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *Если характеристичное уравнение, не имея корней, модули которых более единицы, имеет корни, модули которых равны единице, то решение задачи об устойчивости невозмущенного периодического движения существенно зависит от членов высших порядков, т. е. от функций $\bar{X}_s$ в уравнениях* (2.36).

Главное значение эта теорема имеет для тех случаев, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_s} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (2.51)$$

где функция Гамильтона H содержит явно время t и является периодической функцией последнего с периодом ω.

Пусть H — голоморфная функция переменных x_s и y_s, разложение которой имеет вид

$$H=H_2+H_3+\ \ldots, \qquad (2.51')$$

где H_2 — квадратичная форма от x_s, y_s с периодическими коэффициентами.

Тогда, как показано в § 3 главы I, характеристичное уравнение системы первого приближения есть всегда возвратное, так что каждому корню ρ_i этого уравнения соответствует корень ρ_i^{-1}. Отсюда сейчас же следует, что невозмущенное периодическое движение почти всегда неустойчиво и что устойчивость возможна только в том случае, когда все корни характеристичного уравнения равны единице по модулю, т. е. когда все характеристические показатели имеют равные нулю вещественные части. А все эти случаи и относятся к категории особенных, в которых решение задачи требует вообще рассмотрения членов высших порядков в уравнениях (2.51).

Это исследование, вообще очень сложное и громоздкое, оказывается ненужным, если форма H_2 есть знакоопределенная функция Ляпунова, а форма $\frac{\partial H_2}{\partial t}$ есть знакопостоянная, противоположного знака с H_2. Действительно, в этом случае мы можем положить $V=H_2$, вследствие чего будем иметь $V'=\frac{\partial H_2}{\partial t}$. Поэтому, если H_2 удовлетворяет сделанным допущениям, то можем утверждать, что невозмущенное движение устойчиво. Отсюда будет следовать, разумеется, что соответствующее характеристичное уравнение не может иметь корней, модули которых были бы отличны от единицы.

Для иллюстрации теорем этого параграфа рассмотрим следующие простые примеры.

Пусть уравнения возмущенного движения приведены к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(5 + 4\sin t + \cos 2t)\,x + {}$$
$$+ \frac{1}{6}(2 - 2\sin t + 2\cos t - \sin 2t)\,y + X(t,\ x,\ y),$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{6}(2 - 2\sin t - 2\cos t + \sin 2t)\,x - {}$$
$$- \frac{1}{6}(13 - 4\sin t - \cos 2t)\,y + Y(t,\ x,\ y),$$

где X и Y — какие угодно голоморфные функции x и y, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, коэффициенты которых суть либо периодические, либо вообще какие-то непрерывные, ограниченные функции времени.

Введем вместо переменных x и y новые переменные, ξ и η, посредством линейной подстановки с периодическими коэффициентами

$$\xi = (2 - \sin t - \cos t)\,x + (2 - \sin t + \cos t)\,y,$$
$$\eta = (2 + \sin x - \cos t)\,y - (2 + \sin t + \cos t)\,y.$$

Разрешая эти уравнения относительно x и y, имеем обратную подстановку

$$x = \frac{1}{6}(2 + \sin t + \cos t)\xi + \frac{1}{6}(2 - \sin t + \cos t)\eta,$$
$$y = \frac{1}{6}(2 + \sin t - \cos t)\xi - \frac{1}{6}(2 - \sin t - \cos t)\eta.$$

Посредством этой подстановки предложенные уравнения приведутся к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \Xi(t;\ \xi,\ \eta),$$
$$\frac{d\eta}{dt} = +\frac{1}{2}\xi - \frac{3}{2}\eta + \mathrm{H}(t;\ \xi,\ \eta),$$

где Ξ и H — голоморфные функции переменных ξ и η, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают периодическими или, вообще, ограниченными и непрерывными коэффициентами.

Определяющее уравнение последней системы имеет вид

$$D(\varkappa) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} - \varkappa & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} - \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

и его корни равны -1 и -2. Отсюда заключаем, что нулевое решение выведенной системы устойчиво асимптотически при $t \to +\infty$. Следовательно, и нулевое решение $x=0$, $y=0$ также устойчиво асимптотически, каковы бы ни были члены высших порядков в предложенных уравнениях.

Если мы заметим теперь, что общее решение уравнений первого приближения предложенной системы определится формулами

$$x = \frac{1}{3} x_0 (2+\cos t) e^{-t} + y_0 \sin t e^{-2t},$$

$$y = \frac{1}{3} x_0 \sin t e^{-t} + y_0 (2-\cos t) e^{-2t},$$

и что период коэффициентов $\omega = 2\pi$, то мы сможем составить также и характеристичное уравнение.

Последнее напишется, как легко видеть, следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2\pi}-\rho & 0 \\ 0 & e^{-4\pi}-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

и имеет корни

$$\rho_1 = e^{-2\pi}, \quad e_2 = e^{-4\pi},$$

модули которых заведомо менее единицы.

Пусть теперь дана система

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 t \cdot x + (\sin t \cos t - 1) y + X(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sin t \cos t + 1) x + \sin^2 t \cdot y + Y(t, x, y),$$

где X и Y — функции такого же характера, как и в предыдущем примере.

Делая подстановку

$$\xi = x\cos t + y \sin t, \qquad x = \xi \cos t - \eta \sin t,$$

$$\eta = -x \sin t + y \cos t, \quad y = \xi \sin t + \eta \cos t,$$

мы приведем заданные уравнения к следующим:

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi + \Xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = \mathrm{H}.$$

Соответствующее определяющее уравнение

$$D(\varkappa) = \begin{vmatrix} 1-\varkappa & 0 \\ 0 & -\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни 0 и 1, откуда заключаем, что нулевое решение предложенных уравнений неустойчиво.

Так как общее решение уравнений первого приближения данной системы имеет вид

$$x = x_0 e^t \cos t - y_0 \sin t,$$
$$y = x_0 e^t \sin t + y_0 \cos t,$$

то соответствующее характеристичное уравнение

$$\Delta(\varkappa) = \begin{vmatrix} e^{2\pi} - \rho & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{vmatrix}$$

имеет корни

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = e^{2\pi},$$

один из которых по модулю более единицы, что и подтверждает наше заключение о неустойчивости решения

$$x = 0, \quad y = 0$$

предложенных уравнений, каковы бы ни были члены высших порядков X и Y в этих уравнениях.

4. Как мы видели в предыдущих разделах, задача об устойчивости периодического движения, приводящаяся к исследованию устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, может быть разрешена при помощи построения соответствующей функции Ляпунова или вычислением характеристических показателей, являющихся корнями характеристичного уравнения.

Однако подобрать нужную функцию Ляпунова оказывается делом далеко не легким и никаких общих способов для нахождения таких функций мы не имеем. Еще труднее составить характеристичное уравнение, что, вообще, возможно сделать только при помощи применения бесконечных рядов.

Для иллюстрации такого приема рассмотрим уравнение, изученное Ляпуновым и играющее важную роль в различных и многочисленных приложениях.

Пусть дано уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0, \tag{2.52}$$

где p есть периодическая функция t с вещественным периодом ω, определенная и непрерывная для всех вещественных значений времени, так что

$$p(t + \omega) = p(t). \tag{2.52'}$$

Заметим прежде всего, что если p есть вещественная постоянная, то задача решается немедленно без всяких затруднений. Действительно, определяющее уравнение в этом случае имеет простейший вид:

$$\varkappa^2 + p = 0,$$

откуда

$$\varkappa = \pm\sqrt{-p}, \quad \varkappa_1 = +\sqrt{-p}, \quad \varkappa_2 = -\sqrt{-p}.$$

Поэтому если p есть число отрицательное, то оба корня вещественны и один из них положительный, а другой отрицательный. Следовательно, нулевое решение уравнения (2.52) неустойчиво относительно величин x, $\dot{x}$.

Если p — положительное, то оба корня чисто мнимы и нулевое решение устойчиво относительно тех же величин.

Наконец, если $p = 0$, то нулевое решение заведомо неустойчиво.

Для случая (2.52), т. е. когда p есть периодическая функция, вопрос об устойчивости решается без труда, когда функция p может принимать только отрицательные значения. В самом деле, заменим уравнение (2.52) равносильной системой двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -px. \tag{2.53}$$

Выбирая функцию Ляпунова, например, в виде

$$V = xy,$$

мы имеем в силу уравнений (2.53)

$$V' = y^2 - px^2,$$

откуда в силу третьей теоремы § 2 видно, что нулевое решение системы (2.53) неустойчиво.

Если функция p может принимать только положительные или равные нулю значения, то функцию Ляпунова построить не удается и вопрос об устойчивости приходится решать исследованием корней характеристичного уравнения, т. е. нахождением характеристических показателей.

Для этого нужно составить характеристичное уравнение (1.51), которое в раскрытом виде есть уравнение второй степени типа (1.51′). Так как по формуле (1.52) свободный член этого уравнения в рассматриваемом случае равен единице, то характеристичное уравнение для системы (2.53) можно написать в следующем виде:

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \tag{2.54}$$

и наша задача приводится к определению единственного инварианта A.

Рассматривая, по-прежнему, только вещественные значения t, мы будем предполагать, что функция $p(t)$ остается всегда также вещественной. Тогда ввиду (1.55) постоянная A также будет вещественной.

Из уравнения (1.54) имеем

$$\rho = A \pm \sqrt{A^2 - 1}. \tag{1.54'}$$

Отсюда следует, что в случае, когда $A^2 < 1$, корни уравнения (2.54) будут обладать модулями, равными единице, и нулевое решение системы (2.53) будет устойчивым.

Если же $A^2 > 1$, то корни эти будут вещественными и один из них численно больше, другой численно меньше единицы. В этом случае будем иметь неустойчивость.

Вопрос о том, какой из этих двух случаев имеет место, является весьма существенным. Поэтому весьма желательно иметь признаки для того и для другого.

Такие признаки, как указывает А. М. Ляпунов, можно вывести из рассмотрения выражения инварианта A в виде некоторого ряда.

Для составления такого ряда будем временно рассматривать вместо (2.52) следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon p(t) \cdot x, \tag{2.55}$$

для которого постоянную A будем искать в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра ε. В силу теоремы раздела 3 § 1 этот ряд будет абсолютно сходящимся при всяком ε, так что A будет не только голоморфной, но некоторой целой трансцендентной функцией параметра ε.

Пусть будут $f(t)$ и $\varphi(t)$ — частные решения уравнения (2.55), определяемые условиями ($t_0 = 0$)

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Разлагая $f(t)$ и $\varphi(t)$ в ряды по степеням ε, будем иметь (см. § 3)

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= 1 + \varepsilon f_1(t) + \varepsilon^2 f_2(t) + \ldots, \\ \varphi(t) &= t + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

где, как нетрудно проверить, $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ суть функции t, вычисляемые последовательно по формулам

$$\left.\begin{aligned} f_n(t) &= \int_0^t dt \int_0^t p(t) f_{n-1}(t)\,dt, \\ \varphi_n(t) &= \int_0^t dt \int_0^t p(t)\varphi_{n-1}(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{2.57}$$

при условии, что

$$f_0(t) = 1, \quad \varphi_0(t) = t.$$

Напишем теперь характеристичное уравнение типа (1.55), соответствующее системе *)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\varepsilon p(t) \cdot x,$$

в виде

$$\begin{vmatrix} f(\omega) - \rho, & f'(\omega) \\ \varphi(\omega), & \varphi'(\omega) - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

откуда имеем

$$2A = f(\omega) + \varphi'(\omega).$$

Поэтому ввиду (2.56) имеем искомое разложение для инварианта A:

$$A = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)] \cdot \varepsilon^n,$$

а полагая здесь $\varepsilon = -1$, найдем постоянную A для уравнения (2.52) (или, что то же, для системы (2.53)):

$$A = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)]. \tag{2.58}$$

Заметим попутно, что общее решение уравнения (2.52) может быть написано в виде

$$x = x_0 f(t) + \dot{x}_0 \varphi(t),$$

где x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные значения (соответствующие $t_0 = 0$) функции $x(t)$ и ее производной $\dot{x}(t)$. При этом

$$f(t) = 1 - f_1(t) + f_2(t) + \ldots + (-1)^n f_n(t) + \ldots,$$
$$\varphi(t) = t - \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \ldots + (-1)^n \varphi_n(t) + \ldots,$$

где $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ определяются формулами (2.57).

Теперь, рассматривая формулу (2.58), мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 1-я Ляпунова. *Если функция $p(t)$ такова, что может получать только отрицательные или равные нулю значения (не будучи нулем тождественно), то корни характеристичного уравнения, соответствующего уравнению (2.52), всегда будут вещественными, и один из них будет больше, другой меньше единицы.*

Действительно, формулы (2.57) дают

$$f_n(\omega) = \int_0^{\omega} dt \int_0^{t} p(t) f_{n-1}(t)\, dt, \quad \varphi_n'(\omega) = \int_0^{\omega} p(t) \varphi_{n-1}(t)\, dt, \tag{2.59}$$

---

*) Для упрощения принято $t_0 = 0$.

откуда видно, что при n четном величины $f_n(\omega)$ и $\varphi'_n(\omega)$ неотрицательны, а при n нечетном — неположительны. Таким образом, каждый член ряда (2.58) есть величина неотрицательная и, следовательно, постоянная A, вычисляемая по формуле (2.58), будет заведомо положительной, и притом бóльшей единицы. А этим теорема и доказана.

5. Рассмотрим теперь случай, когда функция $p(t)$ может получать только положительные или равные нулю значения, предполагая, что она не равна нулю тождественно.

Тогда формулы (2.57) показывают, что функции $f_n(t)$ и $\varphi'_n(t)$ также могут получать только положительные или равные нулю значения и, следовательно, ряд (2.58) будет знакочередующимся.

Для исследования этого ряда выведем сначала следующее неравенство:

$$(f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\, t \int_0^t p(t)\, dt - 2n\,(f_n + \varphi'_n) > 0, \tag{2.60}$$

которому будут удовлетворять функции f_n и φ_n при $n > 1$, для всякого отличного от нуля вещественного значения t.

Для этого положим

$$S_n = (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\, t \int_0^t p\, dt - 2n\,(f_n + \varphi'_n).$$

Вводя обозначения

$$F_n = t f'_{n-1} \int_0^t p\, dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1}) \int_0^t p\, dt - 2n f'_n,$$

$$\Phi_n = t\varphi_{n-2} \int_0^t p\, dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\, t - 2n\varphi_{n-1},$$

можем представить S_n в следующей форме:

$$S_n = \int_0^t (F_n + p\Phi_n)\, dt.$$

Неравенство (2.60) будет поэтому доказано, если покажем, что для всех положительных значений t имеют место неравенства

$$F_n > 0, \quad \Phi_n > 0, \tag{2.61}$$

а для всех отрицательных t — им противоположные:

$$F_n < 0, \quad \Phi_n < 0. \tag{2.61'}$$

С этой целью замечаем, что предыдущие выражения для функций F_n и Φ_n можно привести к виду

$$F_n = \int_0^t \left(2f'_{n-1} \int_0^t p\,dt + pu_n\right) dt,$$

$$\Phi_n = \int_0^t (2tp\varphi_{n-2} + v_n)\,dt,$$

где u_n и v_n определяются формулами

$$u_n = (\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) \int_0^t p\,dt + \varphi'_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1) f_{n-1},$$

$$v_n = (\varphi_{n-2} + t\varphi'_{n-2}) \int_0^t p\,dt + f_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1)\varphi_{n-1},$$

которые можно также написать в виде

$$u_n = \int_0^t [2p(\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) + F_{n-1}]\,dt,$$

$$v_n = \int_0^t \left[2f'_{n-1} + 2\varphi'_{n-2} \int_0^t p\,dt + p\Phi_{n-1}\right] dt.$$

Из этих формул заключаем, что если для всех положительных значений t имеют место неравенства

$$F_{n-1} > 0, \quad \Phi_{n-1} > 0,$$

то для таких же значений t будут иметь место и неравенства (2.61), и что если для всякого отрицательного значения t имеем

$$F_{n-1} < 0, \quad \Phi_{n-1} < 0,$$

то для такого же значения t будут выполняться и неравенства (2.61').

Отсюда следует, что справедливость неравенств (2.61) для $t > 0$ и неравенств (2.61') для $t < 0$ будет несомненной при всяком n, бóльшем единицы, если эти неравенства имеют место для $n = 2$.

Но для $n = 2$ наши формулы дают непосредственно

$$F_2 = 2 \int_0^t \left[\left(\int_0^t p\,dt\right)^2 + 2t\varphi'_1\right] dt > 0,$$

$$\Phi_2 = 2 \int_0^t [pt^2 + 2f_1]\,dt > 0.$$

Таким образом, неравенство (2.60) можно считать доказанным.

Обращаясь теперь к формуле (2.58) и замечая, что в силу доказанного только что неравенства (2.60), справедливого для всякого значения t, имеем (полагая $t = \omega$)

$$f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega) < [f_{n-1}(\omega) + \varphi_{n-1}'(\omega)]\frac{\omega}{2n}\int_0^\omega p\,dt,$$

находим

$$A < 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n}\int_0^\omega p\,dt\right)[f_{2n-1}(\omega) + \varphi_{2n-1}'(\omega)]$$

и

$$A > 1 - \frac{\omega}{2}\int_0^\omega p\,dt + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n+2}\int_0^\omega p\,dt\right)[f_{2n}(\omega) + \varphi_{2n}'(\omega)].$$

Отсюда выводим, что если

$$\omega\int_0^\omega p\,dt \leqslant 4,$$

то необходимо будет

$$-1 < A < +1,$$

и, таким образом, приходим к следующему предложению:

Теорема 2-я Ляпунова. *Если функция $p(t)$ такова, что может получать только положительные или равные нулю значения (не будучи нулем тождественно) и если притом эта функция удовлетворяет условию*

$$\omega\int_0^\omega p\,dt \leqslant 4,$$

то корни характеристичного уравнения, соответствующего уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0,$$

всегда будут мнимыми, обладая модулями, равными единице.

Условия, выраженные в этой теореме, достаточны, но, конечно не необходимы, так как хотя бы для постоянного $p > 0$ эти условия вовсе не обязаны выполняться.

Глава III

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Здесь излагаются основные результаты А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре по общей теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут использованы в следующих главах нашей книги.

§ 1. Предварительные соображения и замечания

1. Вернемся к системе (1.82) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, к которой всегда возможно привести дифференциальные уравнения движения какой-либо материальной системы с конечным числом степеней свободы.

Для удобства изложения напишем эту систему еще раз:

$$\dot{z}_s = Z_s(t \mid z_\sigma \mid \mu_j), \tag{3.1}$$

где z_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ — неизвестные функции, а μ_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ — некоторые параметры (например, массы материальных точек, образующих механическую систему).

Было уже замечено, что уравнения (3.1) мы вообще интегрировать в конечном виде не умеем, так как до сих пор не найден какой-либо достаточно общий метод нахождения общего решения или общего интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поэтому приобретает большое значение проблема разыскания *частных решений* (или частных интегралов), позволяющих установить хотя бы некоторые свойства функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, а следовательно, некоторые свойства движения рассматриваемой материальной системы.

Для многих задач небесной механики особенно важную роль играют периодические решения дифференциальных уравнений, соответствующие *периодическим движениям* или *периодическим орбитам* интересующих нас небесных тел.

Многовековые наблюдения за движениями планет и их спутников издавна обнаружили замечательную повторяемость небесных явлений, происходящую от периодичности или, по крайней мере, почти-периодичности действительных движений реальных небесных объектов.

Поэтому возникает вопрос о возможности представления координат движущихся небесных тел аналитическими формулами, содержащими или только периодические функции времени, или хотя бы некоторые периодические части.

А эта задача и приводится к задаче о разыскании таких решений уравнений движения типа (3.1), которые были бы или чисто периодическими функциями времени, или почти-периодическими, или содержащими периодические функции частично.

Математическая задача, требующая разрешения, заключается в самом общем виде в следующем.

Дана система дифференциальных уравнений типа (3.1). *Требуется узнать, не имея общего решения этих уравнений, имеются ли среди бесчисленного множества частных решений такие, которые являются периодическими, и если такие решения существуют, то найти аналитические формулы, их представляющие.*

Таким образом, задача расщепляется на две отдельные частичные задачи. Первая задача, относящаяся к области качественной теории дифференциальных уравнений, это *задача о существовании* периодических решений, и методы решения этой задачи суть *качественные методы небесной механики.* Вторая задача, заключающаяся в нахождении формул, представляющих периодические решения, относится к области аналитической теории, и методы ее решения суть *аналитические методы небесной механики.*

Наиболее трудной является первая задача, так как, если известно, что периодические решения существуют, то всегда можно найти формулы, представляющие эти решения (хотя бы при помощи бесконечных рядов).

К сожалению, математики до сих пор не открыли какой-либо общий метод обнаруживания существования периодических решений и указали только некоторые частные приемы, при помощи которых иногда действительно удается обнаружить такие решения, после чего нетрудно, как уже замечено, построить формулы, по которым можно производить вычисления.

Такие приемы основаны обычно на предварительном знании одного или нескольких изолированных периодических решений системы (3.1) или системы, получающейся из (3.1) заменой параметров μ_j какими-либо их частными значениями $\mu_j^{(0)}$ (чаще все $\mu_j^{(0)} = 0$). Такие решения иногда усматриваются из самой формы уравнений (3.1) или являются следствием самой структуры рассматриваемой материальной системы.

Например, может случиться, что уравнения (3.1) удовлетворяются постоянными значениями неизвестных функций, что соответствует положению равновесия материальной системы.

Такое решение может рассматриваться как периодическое с произвольным периодом, и тогда возникает вопрос о существовании и нахождении периодических движений около такого положения равновесия.

Если найдены периодические решения системы (3.1) при любых значениях параметров, то задачу отыскания других периодических решений, близких к уже известным, мы будем называть *задачей Ляпунова*, а совокупность методов или приемов нахождения таких периодических решений — *теорией периодических решений Ляпунова.*

Может также случиться, что легко обнаружить периодические решения системы (3.1) при частных значениях параметров (так, например, если в задаче трех тел одну из масс положить равной нулю, то получим задачу двух тел, которая допускает периодические решения — движения по кругу или по эллипсу).

Тогда можно поставить вопрос об отыскании периодических решений системы (3.1) при значениях параметров, близких к тем частным значениям, которые соответствуют периодическим решениям. Такую задачу будем называть *задачей Пуанкаре*, а совокупность методов разыскания таких периодических решений будем называть *теорией периодических решений Пуанкаре.*

Из сказанного в разделе 3 § 4 главы I непосредственно вытекает, что между этими двумя теориями нет принципиального различия, так как и та и другая рассматривают вопрос о нахождении периодических решений, близких к уже известным.

Ясно также, что теорию Пуанкаре можно рассматривать как некоторый частный (или особый) случай теории Ляпунова, так как параметры μ_j, входящие в уравнения (3.1), можно рассматривать также как неизвестные функции.

Однако из методических соображений мы будем рассматривать обе теории по отдельности. К тому же и области применимости каждой из этих двух теорий различны, и в каждом отдельном случае удобнее применять метод, взятый или из теории Ляпунова, или из теории Пуанкаре.

Мы будем заниматься в нашей книге теорией периодических решений только в указанной постановке, и других теорий по причине ограниченного объема книги касаться вовсе не будем.

Впрочем, эти другие теории носят более частный характер или просто являются некоторым обобщением или некоторым видоизменением теорий Ляпунова и Пуанкаре.

2. Итак, допустим, что нам известно какое-либо частное решение системы (3.1)

$$z_s = f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.1'}$$

в котором все функции $f_s(t)$ являются периодическими функциями времени с одним и тем же вещественным периодом и что этому решению соответствуют либо произвольные значения параметров, либо специально выбранные.

Полагая тогда, как в главе I,

$$x_s = z_s - f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.2}$$

а в случае надобности полагая, сверх того,

$$x_{k+i} = \mu_i - \mu_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{3.2'}$$

мы опять придем к системе дифференциальных уравнений нормального вида

$$\dot{x}_s = X_s(t \mid x_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.3}$$

определяющей решения, близкие к периодическим, уже известным.

Так как правые части уравнений (3.3) удовлетворяют условиям

$$X_s(t \mid 0) \equiv 0,$$

то известному периодическому решению $f_s(t)$ системы (3.1) будет соответствовать нулевое решение системы (3.3), которое будем рассматривать как периодическое с тем периодом, который нам будет нужен.

Задача, следовательно, всегда приводится к разысканию периодических решений системы (3.3), близких к нулевому решению этой системы

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ \ldots, \ x_n = 0. \tag{3.3'}$$

Эту задачу мы будем рассматривать (и с точки зрения Ляпунова и с точки зрения Пуанкаре) исключительно в предположениях голоморфности функций $X_s(t|x_\sigma)$ в некоторой области начала координат, т. е. нулевого решения (3.3′).

Таким образом, правые части уравнений (3.3) всегда будут представляться в виде следующих рядов:

$$X_s = X_s^{(1)} + X_s^{(2)} + \ldots + X_s^{(m)} + \ldots, \tag{3.4}$$

где

$$X_s^{(1)} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{3.4'}$$

суть совокупности членов первого порядка с постоянными или с периодическими коэффициентами $p_{s\sigma}$, а

$$X_s^{(m)} = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \tag{3.4''}$$

суть целые однородные функции степени m также либо с постоянными, либо с периодическими коэффициентами.

Ряды (3.4) будем предполагать абсолютно сходящимися в области $|x_s| \leqslant A$, где A — отличная от нуля постоянная, и для всех значений t, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant t \leqslant \omega$, где ω — период функций X_s.

Ясно, впрочем, что в случае, когда X_s не зависят от времени, то ряды (3.4) будут сходящимися при любых значениях последнего.

Как следует из общей теоремы Ляпунова (разд. 2 § 4 главы I), общее решение системы (3.3) может быть представлено в виде рядов, расположенных по степеням произвольных постоянных (за каковые можно принять и начальные значения $x_s^{(0)}$ неизвестных функций), абсолютно сходящихся в любом, заданном наперед промежутке времени $(t_0 - T,\ t_0 + T)$, пока упомянутые произвольные постоянные не превосходят по модулю некоторого, отличного от нуля предела, существенно зависящего от T.

Эти ляпуновские ряды и будут играть основную роль в этой главе.

Рассмотрение нашей задачи начнем с анализа простейших, важных для всего дальнейшего случаев.

3. Рассмотрим сначала одно линейное уравнение вида

$$\dot{x} = \varkappa x + R(t), \tag{3.5}$$

в котором $\varkappa$ — отличная от нуля постоянная, а $R(t)$ — периодическая функция t с периодом ω.

Покажем, что если $\varkappa\omega$ не представляет собой целое кратное $2\pi\sqrt{-1}$, то уравнение (3.5) имеет единственное периодическое решение с периодом ω.

Действительно, общее решение уравнения (3.5) можно определить следующей формулой:

$$x = Ce^{\varkappa t} + e^{\varkappa t}\int_{t_0}^{t} e^{-\varkappa\tau}R(\tau)\,d\tau, \tag{3.6}$$

где C обозначает произвольную постоянную.

Попробуем определить эту постоянную так, чтобы функция $x(t)$ была периодической с периодом ω, т. е. чтобы выполнялось условие $x(t_0 + \omega) = x(t_0)$. Это требование дает для определения постоянной C следующее уравнение:

$$Ce^{\varkappa\omega} + e^{\varkappa\omega}\int_{t_0}^{t_0+\omega} e^{-\varkappa\tau}R(\tau)\,d\tau = C, \tag{3.6'}$$

из которого находим, если $\varkappa\omega \neq 2k\pi\sqrt{-1}$ (k — целое),

$$C = \frac{1}{e^{-\varkappa\omega} - 1} \int_{t_0}^{t_0+\omega} e^{-\varkappa\tau} R(\tau)\, d\tau.$$

Подставляя полученное значение для C в формулу (3.6), найдем после некоторых упрощений следующую формулу для периодического решения уравнения (3.5):

$$x = \frac{e^{\varkappa t}}{e^{-\varkappa\omega} - 1} \int_{t}^{t+\omega} e^{-\varkappa\tau} R(\tau)\, d\tau. \qquad (3.6'')$$

Если постоянная $\varkappa$ такова, что $\varkappa\omega = 2k\pi\sqrt{-1}$, то условие периодичности (3.6′) выполняется только в случае, когда функция $R(t)$ удовлетворяет требованию

$$\int_{t_0}^{t_0+\omega} e^{-\varkappa\tau} R(\tau)\, d\tau = 0.$$

Если последнее условие выполнено, то всякое решение уравнения (3.5) является периодическим.

Пусть теперь дана система линейных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.7)$$

с постоянными коэффициентами. Тогда из рассмотрения формул (1.46′) главы I, дающих общее решение однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами, немедленно следует, что уравнения (3.7) обязательно будут иметь периодические решения, если среди корней определяющего уравнения

$$\| p_{s\sigma} \| - \varkappa E = 0 \qquad (3.7')$$

имеются корни, вещественные части которых равны нулю.

При этом нулевому корню уравнения (3.7′) соответствует решение, в котором все x_s — величины постоянные, что можно рассматривать, как уже было замечено выше, как периодическое решение с любым периодом.

Всякой паре чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ соответствует решение вида

$$x_s = K_s (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t)$$

с двумя произвольными постоянными и с периодом $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Поэтому, если определяющее уравнение имеет k пар чисто мнимых корней $\pm\lambda i$, то в случае, когда ни одно из отношений λ_i/λ_j не представляет целое число, система (3.7) будет иметь k

различных периодических решений с несоизмеримыми периодами $\omega_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$.

Если же среди корней λ_i найдется два таких, что их отношение есть целое (или вообще рациональное) число, то система (3.7) будет иметь периодическое решение, содержащее две пары произвольных постоянных, и т. д.

Следовательно, возможен и такой случай, когда всякое решение системы (3.7) является периодическим с некоторым периодом, общим для всех функций x_s.

Рассмотрим теперь систему линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + R_s(t), \tag{3.8}$$

где все R_s — периодические функции от t с одним и тем же периодом ω. Допустим, что функции $R_s(t)$ представляются в виде конечных или бесконечных сумм косинусов и синусов целых кратностей величины $\frac{2\pi}{\omega} t$, так что

$$R_s(t) = a_{s0} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_{sk} \cos \frac{2\pi k t}{\omega} + b_{sk} \sin \frac{2\pi k t}{\omega} \right), \tag{3.9}$$

где N — или конечное число (целое положительное), или бесконечность *).

Будем искать решение системы (3.8) в виде сумм

$$x_s = A_{s0} + \sum_{k=1}^{N} \left(A_{sk} \cos \frac{2\pi k t}{\omega} + B_{sk} \sin \frac{2\pi k t}{\omega} \right) \tag{3.10}$$

(конечных или бесконечных) с неопределенными коэффициентами.

Требуя, чтобы уравнения (3.8) удовлетворялись выражениями (3.10), мы получим для определения неизвестных коэффициентов уравнения вида

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} A_{\sigma 0} = - a_{s0} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.10$'$}$$

*) Если $N = \infty$, то все ряды (3.9) будем предполагать сходящимися для всякого значения t, иными словами, будем считать все $R_s(t)$ разложимыми в сходящиеся ряды Фурье.

и

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}A_{\sigma k} &= \frac{2\pi k}{\omega}B_{sk} - a_{sk} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}B_{\sigma k} &= -\frac{2\pi k}{\omega}A_{sk} - b_{sk} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N).\end{aligned}\right\} \qquad (3.10'')$$

Из уравнений (3.10′) получим единственные значения величин A_{s0}, если только определитель, составленный из коэффициентов $p_{s\sigma}$, отличен от нуля. Но этот определитель есть $D(0)$ *), а поэтому указанное условие требует, чтобы определяющее уравнение системы (3.8) не имело своим корнем нуль.

Систему (3.10″) удобнее написать в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(A_{\sigma k} + iB_{\sigma k}) = -\frac{2\pi k i}{\omega}(A_{sk} + iB_{sk}) - (a_{sk} + ib_{sk}), \qquad (3.10''')$$

откуда немедленно усматриваем, что существует единственная система значений величин $A_{sk} + iB_{sk}$, удовлетворяющих уравнениям (3.10‴), если $D\left(\frac{2\pi k i}{\omega}\right) \neq 0$, т. е. если определяющее уравнение не имеет корня, представляющего целую кратность $\frac{2\pi i}{\omega}$.

Таким образом, система (3.8) заведомо будет иметь единственное периодическое решение с периодом ω, представляющееся в виде (3.10), если только определяющее уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет корня вида $\frac{2\pi k i}{\omega}$, где k — любое целое число или нуль.

Если для какого-либо значения k имеем $D\left(\frac{2\pi k i}{\omega}\right) = 0$, то соответствующие значения $A_{sk} + iB_{sk}$ не могут быть определены, если только $a_{sk} + ib_{sk}$ не есть нуль.

Вообще $a_{sk} + ib_{sk} \neq 0$, и тогда система (3.8) может быть удовлетворена только в том случае, когда мы введем в соответствующий член формулы (3.10) множитель t, вследствие чего решение (3.10) делается непериодическим.

Такие случаи называются «резонансными», а соответствующее им явление, когда амплитуда неограниченно растет вместе со временем, называется «резонансом». Мы не будем заниматься изучением резонансных случаев, а отошлем читателей к специальной литературе (например, к книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения», Гостехиздат, 1952).

*) См. § 3 главы I.

Рассмотрим в заключение этого параграфа систему линейных однородных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma, \tag{3.11}$$

все коэффициенты $p_{s\sigma}(t)$ которой — периодические функции времени с одним и тем же периодом ω.

Общее решение системы (3.11) дается формулами (1.54) главы I, в которых множители $f_{s\sigma}(t)$ — вообще многочлены относительно t вида (1.54′) с периодическими коэффициентами (с тем же периодом ω).

Поэтому если среди характеристических показателей есть нуль, то система (3.11) обязательно будет иметь одно частное периодическое решение, обладающее тем же периодом ω.

Пусть теперь среди характеристических показателей есть один, вещественная часть которого равна нулю. Если λi есть такой показатель, то среди решений системы (3.11) найдутся решения вида

$$Cf(t)\, e^{\lambda i t},$$

где $f(t)$ обозначает периодическую функцию с периодом ω, а C — постоянная.

Это решение будет периодическим с периодом ω только в том случае, когда $\lambda = \frac{2\pi k}{\omega}$ (k — целое число).

Если характеристический показатель $\varkappa = \lambda l$ таков, что мы имеем

$$\lambda = \frac{2\pi k}{\omega l},$$

где k и l — целые числа, простые между собой, то система будет иметь периодическое решение с периодом $l\omega$.

Мы видим, что системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами (однородные) резко отличаются по своим свойствам от таких же систем с постоянными коэффициентами.

Действительно, последние системы могут иметь периодические решения, обладающие любым периодом, в то время как первые допускают периодические решения или с тем же периодом, каким обладают коэффициенты $p_{s\sigma}(t)$, или кратным ему.

Если система с периодическими коэффициентами неоднородна, т. е. имеет вид

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma + R_s(t), \tag{3.11′}$$

то для существования периодических решений такой системы необходимо, чтобы свободные члены $R_s(t)$ также были периодическими функциями с тем же периодом ω или с периодом, кратным ω.

Действительно, при помощи преобразования Ляпунова система (3.11′) может быть преобразована к виду

$$\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} z_\sigma + Q_s(t), \tag{3.11″}$$

где все $q_{s\sigma}$ — постоянные, а свободные члены $Q_s(t)$ представляют собой линейные комбинации $R_s(t)$ с коэффициентами $l_{s\sigma}(t)$ преобразования Ляпунова. Так как матрица преобразования $L(t)$ периодическая с периодом ω, то для того, чтобы $Q_s(t)$ были периодическими функциями, нужно, чтобы $R_s(t)$ были также периодическими с тем же периодом ω или с кратным ему.

Но система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами может иметь периодические решения, как показано выше, только в том случае, когда все свободные члены суть периодические функции с одним и тем же периодом.

Поэтому система (3.11″) может иметь периодические решения периода $k\omega$ (k — целое), а тогда и первоначальная система (3.11′) также будет иметь периодические решения с таким же периодом.

Однако фактическое нахождение периодических решений системы (3.11) представляет задачу гораздо более сложную, чем нахождение периодических решений систем с постоянными коэффициентами и вообще возможно только при помощи применения бесконечных рядов.

§ 2. Основы теории периодических решений А. М. Ляпунова

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида (3.3), предполагая, что все X_s — голоморфные функции от x_s, не зависящие от t.

Нам будет более удобно рассматривать эту систему как систему $(n+2)$-го порядка, которую запишем в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma + \overline{X}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n+2), \tag{3.12}$$

где все $\bar{p}_{s\sigma}$ — вещественные постоянные, а

$$\overline{X}_s = \overline{X}_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$

суть голоморфные функции величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2},$$

разложения которых обладают постоянными вещественными коэффициентами и начинаются членами не ниже второго порядка.

Допустим, что постоянные $\bar{p}_{s\sigma}$ таковы, что определяющее уравнение, соответствующее системе (3.12):

$$\bar{D}(\varkappa) = \| \bar{p}_{s\sigma} \| - \varkappa E = 0, \tag{3.13}$$

которое есть уравнение $(n+2)$-й степени относительно $\varkappa$, имеет пару простых чисто мнимых корней

$$\lambda i, \quad -\lambda i \qquad (\lambda > 0) \tag{3.13'}$$

и что притом уравнение (3.13) не имеет корней вида $m\lambda i$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Тогда, как установлено в предыдущем параграфе, система линейных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma, \tag{3.12'}$$

получающаяся из (3.12) отбрасыванием всех членов выше первого порядка, обязательно будет иметь периодическое решение с периодом $2\pi/\lambda$ и с двумя произвольными постоянными.

Возникает вопрос, будет ли иметь периодические решения также и нелинейная система (3.12), и если этот вопрос разрешается положительно, то как найти такие решения?

Ответом на этот вопрос и является построенная А. М. Ляпуновым теория периодических решений систем вида (3.12), к изложению основ которой мы теперь и переходим.

Предварительно мы преобразуем систему (3.12) к некоторому характерному виду, используя для этого первые интегралы линейной системы (3.12′).

Действительно, из общей теории, изложенной в § 3 главы I, следует, что уравнения (3.12′) имеют два первых интеграла вида

$$(x + iy) e^{-\lambda i t} = C_1, \quad (x - iy) e^{\lambda i t} = C_2,$$

где x и y — линейные формы величин x_s с постоянными вещественными коэффициентами, а C_1 и C_2 — две произвольные постоянные. Принимая тогда x и y за новые переменные вместо, например, x_{n+1} и x_{n+2}, мы приведем систему (3.12′) к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y, \quad \dot{y} = +\lambda x, \\ &\dot{x}_s = \sum_{s=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + \alpha_s x + \beta_s y \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3.12''}$$

Действительно, обозначая через A_s, B_s некоторые вещественные постоянные, мы выведем из уравнений (3.12′) следующие:

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n+2} A_s x_s = \sum_{s=1}^{n+2} x_s \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{\sigma s} A_\sigma,$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n+2} B_s x_s = \sum_{s=1}^{n+2} x_s \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{\sigma s} B_\sigma.$$

Полагая теперь

$$x = \sum_{s=1}^{n+2} A_s x_s, \qquad y = \sum_{s=1}^{n+2} B_s x_s, \tag{3.14}$$

выберем постоянные A_s и B_s таким образом, чтобы предыдущие равенства приняли вид двух первых уравнений (3.12″).

Для этого A_s и B_s должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} A_\sigma &= -\lambda B_s, \\ \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} B_\sigma &= +\lambda A_s \end{aligned}\right. \qquad (s = 1, 2, \ldots, n+2),$$

которые представляют систему $2(n+2)$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Отсюда выводим, что числа $A_s + iB_s$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}(A_\sigma + iB_\sigma) = \lambda i (A_s + iB_s),$$

которые заведомо имеют ненулевые решения, так как определитель системы есть $\bar{D}(\lambda i)$ и равен нулю в силу (3.13′).

Определив линейные функции x и y, вернемся к уравнениям (3.12) и преобразуем их, принимая вместо x_{n+1} и x_{n+2} в качестве новых неизвестных x и y.

Преобразованные уравнения будут иметь, как легко видеть, следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y + X, \qquad \dot{y} = +\lambda x + Y, \\ &\dot{x}_s = \sum_{s=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + \alpha_s x + \beta_s y + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

где $p_{s\sigma}$, α_s и β_s — постоянные, зависящие от $\bar{p}_{s\sigma}$, A_s, B_s, а X, Y и X_s — голоморфные функции величин x, y и x_s, разложения которых не содержат членов ниже второго порядка и обладают постоянными вещественными коэффициентами. Определяющее уравнение системы (3.15) имеет вид

$$(\varkappa^2+\lambda^2)\,D(\varkappa)=0, \tag{3.16}$$

где

$$D(\varkappa)=|\,\|p_{s\sigma}\|-\varkappa E\,|. \tag{3.16'}$$

Так как сделанное нами преобразование можно рассматривать как преобразование Ляпунова, то корни определяющего уравнения системы (3.12) совпадают с корнями уравнения (3.16), откуда следует, что уравнение $D(\varkappa)=0$ не имеет корней вида $m\lambda i$ $(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

Заметим, что, без нарушения общности, все постоянные α_s и β_s в уравнениях (3.15) можно считать равными нулю.

В самом деле, если это условие не выполняется, то сделаем дополнительное преобразование, вводя вместо переменных x_s новые переменные ξ_s подстановкой

$$\xi_s=x_s+M_s x+N_s y \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где M_s, N_s — неопределенные постоянные.

Составляя уравнения для величин ξ_s и требуя, чтобы в этих уравнениях исчезли члены с первыми степенями x и y, мы получим следующие условия:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}M_\sigma-\lambda N_s=\alpha_s, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}N_\sigma+\lambda M_s=\beta_s,$$

которые можно переписать, как мы это уже делали выше в аналогичных случаях, в виде системы уравнений с неизвестными M_s+iN_s:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(M_\sigma+iN_\sigma)+\lambda i\,(M_s+iN_s)=\alpha_s+i\beta_s.$$

Так как определитель этой системы есть $D(-\lambda i)$, т. е. величина, не равная нулю в силу свойств постоянных $p_{s\sigma}$, то последние уравнения разрешимы и дадут единственную, вполне определенную систему значений для M_s+iN_s.

Таким образом, вместо системы (3.15) можем рассматривать следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}=-\lambda y+X, \qquad \dot{y}=+\lambda x+Y,\\ &\dot{x}_s=\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}x_\sigma+X_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

где величины $p_{s\sigma}$ те же самые, что и в (3.15), причем X, Y и X_s обладают такими же свойствами, как и аналогичные величины в первоначальных уравнениях (3.15).

2. Если мы отбросим в уравнениях (3.17) все члены выше первого порядка, то получим уравнения первого приближения

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y, \qquad \dot{y} = +\lambda x, \\ &\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.17'}$$

которые имеют очевидное решение:

$$x = c \cdot \cos\lambda(t - t_0), \qquad y = c \cdot \sin\lambda(t - t_0), \qquad x_s = 0,$$

с периодом $2\pi/\lambda$ и с двумя произвольными постоянными.

Докажем теперь теорему А. М. Ляпунова о существовании периодического решения полных уравнений (3.17).

Теорема А. М. Ляпунова. *Если уравнениям* (3.17) *возможно удовлетворить рядами вида*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}, \qquad x_s = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_s^{(k)}, \tag{3.18}$$

расположенными по возрастающим степеням произвольной постоянной c, в которых все $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_s^{(k)}$ были бы периодическими функциями времени, представляемыми конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей переменной τ, где

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \qquad T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots), \tag{3.18'}$$

то ряды (3.18) *сходятся абсолютно при всяком t, пока $|c|$ не превышает известного предела, и действительно представляют периодическое решение уравнений* (3.17) *с периодом T, являющимся голоморфной функцией c.*

Для доказательства преобразуем сначала уравнения (3.17) к новым переменным, делая подстановку:

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \qquad x_s = rz_s, \tag{3.19}$$

где r и ϑ — величины, аналогичные полярным координатам на плоскости.

Преобразованные уравнения, как нетрудно проверить, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{r} = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta, \qquad \dot{\vartheta} = \lambda + \frac{Y\cos\vartheta - X\sin\vartheta}{r}, \\ &\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} z_\sigma - \frac{X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta}{r} z_s + \frac{1}{r} X_s, \end{aligned}\right\} \tag{3.19'}$$

где X, Y, X_s предполагаются выраженными через новые переменные по формулам (3.19).

Так как все функции X, Y, X_s в уравнениях (3.17) не содержат в своих разложениях членов ниже второго порядка относительно x, y, x_s, то правые части уравнений (3.19′) будут голоморфными функциями величин r, z_1, z_2, ..., z_n, уничтожающимися при одновременном равенстве всех этих величин нулю и коэффициенты разложений которых суть периодические функции величины ϑ, которые всегда можно представить в виде конечных рядов косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Так как предположено (что не нарушает общности), что постоянная λ положительна, то пока $|r|$, $|z_s|$ достаточно малы, $\dot{\vartheta} > 0$ и переменная ϑ возрастает одновременно с t. Поэтому ϑ можно принять за новую независимую переменную вместо t, вследствие чего уравнения, определяющие r и z_s как функции ϑ, напишутся следующим образом:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R, \qquad \frac{dz_s}{d\vartheta} = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} z_\sigma + \varphi_s \cdot r + Z_s, \tag{3.20}$$

где

$$q_{s\sigma} = \frac{1}{\lambda} p_{s\sigma} \qquad (s,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

величины φ_s обозначают некоторые квадратичные формы от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, а R и Z_s — голоморфные функции переменных r и z_s, разложения которых по степеням этих величин не содержат членов ниже второго порядка и обладают периодическими относительно ϑ коэффициентами, представляемыми конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Притом ряды эти сходятся равномерно для всех вещественных значений ϑ, пока модули величин r, z_s не превосходят некоторого, не равного нулю предела.

Будем теперь искать частное решение системы (3.20) в виде рядов

$$r = c + \sum_{k=2}^{\infty} c^k u^{(k)}, \qquad z_s = \sum_{k=1}^{\infty} c^k u_s^{(k)}, \tag{3.21}$$

расположенных по возрастающим степеням произвольной постоянной c с периодическими относительно ϑ коэффициентами.

Подставляя ряды (3.21) вместо r, z_s в уравнения (3.20) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c в левых и правых частях равенств, мы получим для определения неизвестных функций $u^{(k)}$, $u_s^{(k)}$ следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du_s^{(1)}}{d\vartheta}=\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}u_\sigma^{(1)}+\varphi_s && (s=1,\,2,\,\ldots,\,n),\\
&\frac{du^{(l)}}{d\vartheta}=U^{(l)} && (l=2,\,3,\,\ldots),\\
&\frac{du_s^{(l)}}{d\vartheta}=\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}u_\sigma^{(l)}+\varphi_s u^{(l)}+U_s^{(l)} && \begin{pmatrix} l=2,\,3,\,\ldots \\ s=1,\,2,\,\ldots,\,n\end{pmatrix},
\end{aligned}\right\}\qquad (3.21')$$

где $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ — известные целые рациональные функции от тех $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < l$, с коэффициентами, представляющими конечные ряды косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Уравнения (3.21) интегрируются последовательно и доставляют искомые функции в следующем порядке:

$$u_s^{(1)},\ u^{(2)},\ u_s^{(2)},\ u^{(3)},\ u_s^{(3)},\ \ldots,\ u^{(l)},\ u_s^{(l)},\ \ldots,\qquad (3.21'')$$

и когда уравнения (3.20) действительно имеют периодическое решение, то функции $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ будут получаться в виде конечных сумм косинусов и синусов целых кратностей ϑ с постоянными коэффициентами.

Допустим, что все функции $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < l$, определены и вышли периодическими функциями указанного характера. Тогда прежде всего найдем следующую по порядку функцию $u^{(l)}$ простой квадратурой:

$$u^{(l)}=\int_0^{\vartheta} U^{(l)}\,d\vartheta,\qquad (3.22)$$

и если периодическая функция, стоящая под знаком интеграла, не содержит постоянного члена, то функция $u^{(l)}$ также будет периодической.

Но тогда уравнения из системы (3.21′), определяющие функции $u_s^{(l)}$, заведомо будут иметь периодическое решение, так как свободные члены в этих уравнениях суть периодические функции, являющиеся конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей ϑ, а уравнение

$$\Delta(\varkappa)=|\,\|q_{s\sigma}\|-\varkappa E\,|=\frac{1}{\lambda^n}D(\lambda\varkappa)=0\qquad (3.23)$$

при сделанных допущениях не имеет корней вида $m\sqrt{-1}$.

Поэтому рассматриваемые уравнения принадлежат к типу уравнений (3.8), рассмотренных в § 1 этой главы, только независимой переменной является ϑ и период свободных членов равен 2π.

Если же подынтегральная функция в формуле для $u^{(l)}$ содержит постоянный член, то функция $u^{(l)}$ будет представляться в виде

$$u^{(l)} = g\vartheta + v, \qquad g = \text{const},$$

где v — периодическая функция, а поэтому $u^{(l)}$, а следовательно, и все последующие определяемые функции не будут периодическими и периодическое решение системы (3.20) не существует *).

3. Докажем теперь, что в случае, когда все функции (3.21′) оказываются периодическими, ряды (3.21) будут абсолютно сходящимися, по крайней мере при достаточно малых значениях $|c|$ и при всех вещественных значениях ϑ.

Для доказательства предположим, что при помощи некоторого линейного преобразования система (3.20) приведена к такому виду, в котором все коэффициенты $q_{s\sigma}$, которые не содержатся в группе

$$\begin{gathered} q_{11} = \varkappa_1, \ q_{22} = \varkappa_2, \ \ldots, \qquad q_{nn} = \varkappa_n, \\ q_{21} = \sigma_1, \ q_{32} = \sigma_2, \ \ldots, \ q_{n,\,n-1} = \sigma_{n-1}, \end{gathered}$$

суть нули, а $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — корни уравнения (3.23).

Такое преобразование, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, всегда возможно, и мы можем считать, что оно уже выполнено.

Рассматривая теперь в этом предположении ряды (3.21), допустим, что в этих рядах все коэффициенты $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$ для которых $\mu < l$, уже определены и, таким образом, известны.

Тогда для определения коэффициентов $u^{(l)}$ и $u_s^{(l)}$ получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du^{(l)}}{d\vartheta} = U^{(l)}, \\ &\frac{du_1^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_1 u_1^{(l)} + \varphi_1 u^{(l)} + U_1^{(l)}, \\ &\frac{du_j^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_j u_j^{(l)} + \sigma_{j-1} u_{j-1}^{(l)} + \varphi_j u^{(l)} + U_j^{(l)} \\ &\qquad\qquad (j = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

где $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ (а также, конечно, и все φ_s) являются известными периодическими функциями ϑ с общим периодом 2π.

---

*) В сущности, мы можем только утверждать, что в этом случае не существует периодическое решение р а с с м а т р и в а е м о г о т и п а.

Первое из этих уравнений дает опять формулу (3.22) и определяет, по нашему предположению, периодическую функцию $u^{(l)}$. Каждое из следующих уравнений представляет собой уравнение с одной только неизвестной типа (3.5). В самом деле, второе из уравнений (3.24) после нахождения $u^{(l)}$ определяет функцию $u_1^{(l)}$, а затем из третьего уравнения (3.24) находим последовательно $u_2^{(l)}, \ldots, u_n^{(l)}$.

Для нахождения каждой периодической функции $u_s^{(l)}$ мы можем воспользоваться общей формулой (3.6″) § 1, заменяя в последней t на ϑ, ω на 2π, $\varkappa$ на $\varkappa_s$ и $R(t)$ — соответствующим выражением.

Таким образом, для функций $u_s^{(l)}$ мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(l)} &= \frac{e^{\varkappa_1\vartheta}}{e^{-2\pi\varkappa_1}-1}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\varkappa_1\tau}\left[\varphi_1 u^{(l)} + U_1^{(l)}\right]d\tau, \\ u_j^{(l)} &= \frac{e^{\varkappa_j\vartheta}}{e^{-2\pi\varkappa_j}-1}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\varkappa_j\tau}\left[\sigma_{j-1}u_{j-1}^{(l)} + \varphi_j u^{(l)} + U_j^{(l)}\right]d\tau \\ &\qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Положим теперь

$$\varkappa_s = \lambda_s + i\mu_s, \qquad \rho_s = \frac{\lambda_s}{e^{2\pi\lambda_s}-1}\sqrt{1-2e^{2\pi\lambda_s}\cos 2\pi\mu_s + e^{4\pi\lambda_s}},$$

где λ_s и μ_s — вещественные числа, а радикал считается положительным. Если $\lambda_s = 0$, то под ρ_s будем подразумевать предел

$$\frac{|\sin \pi\mu_s|}{\pi},$$

к которому стремится его выражение при $\lambda_s \to 0$.

При сделанных предположениях о корнях определяющего уравнения все ρ_s будут во всяком случае отличными от нуля.

Обозначим затем через $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$ высшие пределы модулей функций $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ в пределах изменяемости ϑ от 0 до 2π (а следовательно, и для всех вещественных значений ϑ), а через a_s — такие же пределы модулей функций φ_s.

Замечая теперь, что $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ в формулах (3.25) — целые функции от найденных ранее $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, в которых коэффициенты представляют линейные формы с положительными числовыми коэффициентами от коэффициентов разложений функций R и Z_s, и обозначая через $V^{(l)}$, $V_s^{(l)}$ — результаты замены в функциях $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ величин $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, φ_s величинами $v^{(i)}$, $v_s^{(i)}$, a_s и коэффициентов разложений R, Z_s высшими пределами их модулей в пределах изменяемости ϑ от нуля до 2π, мы можем принять:

$$v^{(l)} = 2\pi V^{(l)},$$

$$v_1^{(l)} = \frac{a_1 v^{(l)} + V_1^{(l)}}{|e^{-2\pi\varkappa_1} - 1|} e^{\lambda_1\vartheta} \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_1\tau}\, d\tau,.$$

$$v_j^{(l)} = \frac{|\sigma_{j-1}|\, v_{j-1}^{(l)} + a_j v^{(l)} + V_j^{(l)}}{|e^{-2\pi\varkappa_j} - 1|} \cdot e^{\lambda_j\vartheta} \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_j\tau}\, d\tau.$$

Но легко проверить, что

$$|e^{-2\pi\varkappa_s} - 1| = \frac{1 - e^{2\pi\lambda_s}}{\lambda_s} \rho_s, \qquad \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_s\tau}\, d\tau = e^{-\lambda_s\vartheta} \frac{1 - e^{-2\pi\lambda_s}}{\lambda_s},$$

поэтому из предыдущих формул выводим следующее:

$$\begin{gathered} v^{(l)} = 2\pi V^{(l)}, \qquad \rho_1 v_1^{(l)} = a_1 v^{(l)} + V_1^{(l)}, \\ \rho_j v_j^{(l)} = |\sigma_{j-1}|\, v_{j-1}^{(l)} + a_j v^{(l)} + V_j^{(l)} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n), \end{gathered} \tag{3.26}$$

в которых $V^{(l)}$, $V_s^{(l)}$ будут зависеть только от тех $v^{(\mu)}$, $v_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < l$. Уравнениями этими можно будет пользоваться для всякого $l > 1$. Притом можно будет принять

$$\rho_1 v_1^{(1)} = a_1, \quad \rho_j v_j^{(1)} = |\sigma_{j-1}|\, v_{j-1}^{(1)} + a_j, \tag{3.26'}$$

и тогда они дадут возможность найти всякую из постоянных v и определят высшие пределы модулей для всех функций $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, годные для всех вещественных значений ϑ.

Но по свойству функций R, Z_s для модулей коэффициентов в их разложениях (которые суть периодические функции от ϑ) всегда можно выбрать постоянные высшие пределы так, чтобы ряды, в которые обратятся эти разложения после замены коэффициентов такими высшими пределами, были сходящимися при отличных от нуля r, z_s, модули которых достаточно малы. Тогда этими рядами определятся некоторые голоморфные функции переменных r, z_s, которые обозначим соответственно через $F(r|z_\sigma)$ и $F_s(r|z_\sigma)$. Функции эти будут уничтожаться при $r = z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ и притом заведомо не будут содержать в своих разложениях члены первого порядка.

Если же высшие пределы, о которых идет речь, выбраны таким образом, то величины $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$, определяемые формулами

(3.26), представят коэффициенты в разложениях

$$\left.\begin{aligned} r &= c + v^{(2)}c^2 + v^{(3)}c^3 + \ldots, \\ z_s &= v_s^{(1)}c + v_s^{(2)}c^2 + v_s^{(3)}c^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

по целым положительным степеням c величин r, z_s, удовлетворяющих уравнениям

$$\left.\begin{aligned} r &= c + 2\pi F(r \mid z_\sigma), \\ \rho_1 z_1 &= a_1 r + F_1(r \mid z_\sigma), \\ \rho_j z_j &= |\sigma_{j-1}| z_{j-1} + a_j r + F_j(r \mid z_\sigma) \quad (j = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{3.27$'$}$$

и обращающихся в нуль при $c = 0$.

Но существование решения (3.27) уравнений (3.27′) вытекает из общей теоремы о неявных функциях (см. § 2 главы I), так как уравнения (3.27′) удовлетворяют, как легко установить, всем условиям упомянутой теоремы.

Поэтому ряды (3.27) будут абсолютно сходящимися по крайней мере при достаточно малых значениях $|c|$, а так как эти ряды являются усиливающими для рядов (3.21), то последние также будут абсолютно сходящимися при достаточно малом $|c|$ и при всех вещественных значениях ϑ.

Поэтому построенные нами ряды (3.21), в которых все коэффициенты — периодические функции ϑ с периодом 2π (представляющиеся конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей ϑ), действительно определят периодическое решение уравнений (3.20), зависящее от произвольной постоянной c и стремящееся к нулю, когда c стремится к нулю.

4. Найденному частному решению системы (3.20) соответствует по формулам (3.19) некоторое частное решение уравнений (3.17), которое напишется предварительно в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \left[c + \sum_{k=2}^{\infty} u^{(k)}c^k\right]\cos\vartheta, \\ y &= \left[c + \sum_{k=2}^{\infty} u^{(k)}c^k\right]\sin\vartheta, \\ x_s &= r z_s = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{u}_s^{(k)}c^k \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

где

$$\bar{u}_s^{(k)} = u^{(k-1)}u_s^{(1)} + \ldots + u^{(2)}u_s^{(k-2)} + u_s^{(k-1)}$$

также периодические функции ϑ с периодом 2π.

В формулах (3.28) нужно теперь заменить вспомогательную переменную ϑ ее выражением в функции t и установить периодичность полученного решения относительно t.

Покажем, как найдется эта функция и каков будет вид периодического решения системы (3.17).

Для этого обратимся к уравнению, определяющему переменную ϑ в зависимости от времени, т. е. ко второму из уравнений (3.19′), которое можно написать в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta. \tag{3.29}$$

Здесь через Θ обозначена голоморфная функция переменных r, z_s, уничтожающаяся при одновременном равенстве последних нулю и обладающая в своем разложении коэффициентами, представляющими целые рациональные функции от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, которые можно также представить в виде конечных сумм косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Заменяя теперь в выражении функции Θ величины r и z_s разложениями (3.21), мы сделаем Θ функцией переменной ϑ, а поэтому из уравнения (3.29) можно будет определить ϑ как функцию t.

Полагая, что при $t = t_0$ $\vartheta = 0$, мы выведем сначала из (3.29)

$$\int_0^{\vartheta} \frac{\lambda\, d\vartheta}{\lambda + \Theta} = \lambda (t - t_0). \tag{3.29′}$$

Так как после подстановки в Θ вместо r и z_s рядов (3.21) эта величина делается голоморфной функцией c, уничтожающейся при $c = 0$, то функция, стоящая под знаком интеграла в (3.29′), также голоморфна относительно c и равна единице при $c = 0$.

Поэтому разложение этой функции по степеням c имеет следующий вид:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \Theta} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \Theta_j,$$

где все Θ_j — не зависящие от c периодические функции ϑ, которые можно представить в виде конечных рядов косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Поэтому из уравнения (3.29′) выводим следующее:

$$\vartheta + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \int_0^{\vartheta} \Theta_j\, d\vartheta = \lambda (t - t_0), \tag{3.30}$$

и наша задача заключается теперь в определении ϑ как функции t из этого уравнения.

Для решения этого уравнения преобразуем его к другому виду, выделяя в левой его части все члены, содержащие множителем ϑ. Для этого выделим из функции Θ_j постоянную часть («вековой» член!), полагая

$$\Theta_j = h_j + \overline{\Theta}_j, \tag{3.31}$$

где $\overline{\Theta}_j$ — сумма членов вида $M\cos k\vartheta + N\sin k\vartheta$, а h_j определяется формулой

$$h_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta_j\, d\vartheta. \tag{3.31$'$}$$

При этом, рассматривая внимательно структуру функций Θ_j, мы без труда убедимся, что $h_1 = 0$.

В самом деле, разложение функции Θ начинается членами первого порядка относительно r, z_s и коэффициенты этих членов содержат только первые степени $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Поэтому и Θ_1 есть линейная функция этих величин и ее вековой член, разумеется, есть нуль.

Теперь уравнению (3.30) можно придать вид

$$h\left[\vartheta + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \Phi_j(\vartheta)\right] = \lambda(t - t_0), \tag{3.30$'$}$$

где положено для сокращения

$$h = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j c^j \tag{3.31$''$}$$

и где все $\Phi_j(\vartheta)$ — некоторые, не зависящие от c, конечные ряды косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Ряды (3.30$'$) и (3.31$''$), как это следует из самого способа их получения, будут абсолютно сходящимися для всякого значения ϑ (как вещественного, так и комплексного), пока $|c|$ не превосходит некоторого, отличного от нуля предела.

Положим теперь

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} h = \frac{2\pi}{\lambda}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j c^j\right] \tag{3.32}$$

и введем вместо t и ϑ новые переменные τ и φ формулами

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \qquad \varphi = \vartheta - \tau. \tag{3.32$'$}$$

Тогда уравнение (3.30$'$) приведется к виду

$$\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \Phi_j(\varphi + \tau) = 0, \tag{3.33}$$

в котором будем рассматривать φ как неизвестную, постоянную c — как независимую переменную, а τ — как параметр. Замечая теперь, что каждая из функций $\Phi_j(\varphi+\tau)$ по своему характеру может быть представлена в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням φ и абсолютно сходящегося при всяких φ и τ, мы можем применить к уравнению (3.33) теорему 1 о неявных функциях (см. § 2 главы I). Действительно, уравнение (3.33) удовлетворяется при $c=0$, $\varphi=0$, а его левая часть голоморфна относительно c и φ, причем производная по φ от левой части этого уравнения равна единице при $\varphi=c=0$. Поэтому на основании упомянутой теоремы можем утверждать, что искомая функция φ, удовлетворяющая этому уравнению и обращающаяся в нуль при $c=0$, будет голоморфна относительно c и представится рядом вида

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty} c^k\varphi_k(\tau), \tag{3.33'}$$

абсолютно сходящимся по крайней мере при достаточно малых $|c|$ и при всех значениях τ. Функции $\varphi_k(\tau)$ легко находятся последовательно и выражаются при помощи функций Φ_j и их производных. Например, мы имеем

$$\varphi_1(\tau)=-\Phi_1(\tau), \qquad \varphi_2(\tau)=\Phi_1(\tau)\Phi_1'(\tau)-\Phi_2(\tau), \ \ldots$$

Все эти функции представляются конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей τ, а поэтому являются периодическими относительно τ с периодом 2π.

Таким образом, для ϑ найдем следующее выражение:

$$\vartheta=\tau+\sum_{k=1}^{\infty} c^k\varphi_k(\tau), \tag{3.34}$$

из которого видно, что ϑ увеличивается на 2π, когда τ получает такое же приращение.

Внося это выражение для ϑ в формулы (3.28) и затем разлагая результаты подстановок в ряды по степеням c, мы получим искомое решение уравнений (3.17) в виде рядов:

$$\left.\begin{aligned} x&=\sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}(\tau), \qquad y=\sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}(\tau),\\ x_s&=\sum_{k=2}^{\infty} c^k x_s^{(k)}(\tau) \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n), \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

абсолютно сходящихся по крайней мере при достаточно малых значениях $|c|$ и при всяком значении τ. Все коэффициенты рядов (3.35) будут периодическими функциями от τ, представляющимися конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей τ. Заменяя, наконец, τ его выражением (3.32′), мы убедимся, что формулы (3.35) определяют решение уравнений (3.17), периодическое относительно t, с общим периодом T, зависящим от произвольной постоянной c.

Таким образом, теорема А. М. Ляпунова доказана.

Заметим теперь, что, возвращаясь от переменных системы (3.17) к первоначальным переменным заданной системы (3.12), мы выведем, в силу линейных соотношений с постоянными коэффициентами, связывающими эти системы переменных, периодическое решение системы (3.12) в виде аналогичных рядов

$$x_s = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_s^{(k)}(t) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2), \tag{3.35′}$$

коэффициенты которых суть периодические функции t с тем же периодом T, определяемым формулой (3.32), причем ряды (3.35′) будут абсолютно сходящимися при достаточно малых значениях $|c|$ и при всех значениях времени t.

Это периодическое решение содержит две произвольные постоянные c и t_0, из которых последняя не имеет, впрочем, существенного значения для характера движения, определяемого формулами (3.35′). Характер движения определяется главным образом произвольной постоянной c, изменяя которую непрерывным образом, получим некоторый непрерывный ряд периодических движений, близких к исходному движени , которое представляется теми же формулами при $c = 0$.

Полезно заметить еще, что, отбрасывая в формулах (3.35) или (3.35′) все члены выше первого порядка относительно произвольной постоянной c, мы получим периодическое решение первого приближения, т. е. линейных уравнений (3.17′), или соответственно (3.12′), и это решение будет иметь период, получающийся из (3.32) отбрасыванием всех членов выше первого порядка, т. е. период, равный $2\pi/\lambda$.

Разумеется, что аналогичное периодическое решение системы (3.12) мы получим для каждой пары простых чисто мнимых корней определяющего уравнения, так что если уравнение (3.13) имеет k пар простых чисто мнимых корней $\pm\lambda_s i$, причем ни одно из отношений λ_i/λ_j не есть целое число, то система (3.12) будет иметь k различных периодических решений, каждое с одной существенной произвольной постоянной.

5. Теорема Ляпунова устанавливает, что если уравнениям (3.17) можно удовлетворить периодическими рядами, расположенными по степеням произвольной постоянной c, то эти уравнения действительно имеют периодическое решение, представляемое указанными рядами. Поэтому, если, применяя процедуру, описанную в разделе 2, мы никогда не встретим функции $u^{(l)}$, содержащей вековой член, то можем быть уверены, что периодическое решение действительно существует. Однако такой способ может привести к цели только в том случае, когда ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным, т. е. когда периодическое решение рассматриваемого типа не существует.

Поэтому для приложений теории Ляпунова к задачам небесной механики чрезвычайно важно иметь какие-либо признаки, которые позволили бы заранее и при помощи конечного числа операций установить, что интересующее нас периодическое решение действительно существует.

Такой признак указан А. М. Ляпуновым в его знаменитом сочинении и позволяет в ряде важных для нас случаев обнаруживать существование периодического решения, которое после этого всегда может быть найдено в виде указанных выше рядов.

Этот признак существования периодических решений вытекает из следующей, чрезвычайно важной теоремы:

Теорема А. М. Ляпунова о голоморфном интеграле. *Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений вида*

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y + X, \qquad \dot{y} = +\lambda x + Y, \\ &\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

где λ — положительная постоянная, $p_{s\sigma}$ — такие постоянные вещественные коэффициенты, что уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет корней вида $m\lambda\sqrt{-1}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а X, Y, X_s — голоморфные функции величин x, y и x_s, разложения которых не содержат членов ниже второго порядка и обладают постоянными вещественными коэффициентами.

Тогда, если система (3.36) имеет не зависящий от времени голоморфный интеграл, в котором совокупность членов второго порядка содержит переменные x и y, то уравнения (3.36) всегда имеют периодическое решение, представляемое рядами вида

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}, \qquad x_s = \sum_{k=2}^{\infty} c^k x_s^{(k)}, \tag{3.36$'$}$$

где c — произвольная постоянная, а все $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_s^{(k)}$ — периодические функции времени с общим периодом T, являющимся голоморфной функцией c, представляемые конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей величины τ, *определяемой формулами*

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{1 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k c^k\right\}, \tag{3.36''}$$

причем все h_k — вполне определенные постоянные, а t_0 — вторая произвольная постоянная.

По условию теоремы уравнения (3.36) имеют первый интеграл следующего вида:

$$\Phi(x, y \mid x_\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x, y \mid x_\sigma) = \text{const}, \tag{3.37}$$

где Φ_k обозначает целую однородную функцию величин x, y, x_s степени k, причем Φ_2 обязательно содержит члены с x и y.

Нетрудно показать, что при сделанных предположениях $\Phi_1 \equiv 0$, а Φ_2 содержит x и y только в виде суммы $x^2 + y^2$, т. е. что интеграл (3.37) обязательно имеет вид

$$x^2 + y^2 + F(x, y \mid x_\sigma) = \text{const}, \tag{3.37'}$$

где F означает голоморфную функцию от x, y, x_s, разложение которой не содержит членов ниже второго порядка, а в членах второго порядка, если такие входят в нее, не содержится ни x, ни y. Чтобы показать это, напишем интеграл Φ в возможно более общем виде, выписывая только члены первого и второго порядков:

$$\Phi = \alpha x + \beta y + \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma x_\sigma + ax^2 + 2bxy + cy^2 +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{n} a_\sigma x x_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{n} b_\sigma y y_\sigma + \sum_{s,\sigma=1}^{n} a_{s\sigma} x_s x_\sigma + \ldots = \text{const}. \tag{3.38}$$

Так как $\Phi = \text{const}$ есть по условию первый интеграл системы (3.36), то должно выполняться следующее тождество:

$$(-\lambda y + X)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + (\lambda x + Y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s)\frac{\partial\Phi}{\partial x_s} \equiv 0. \tag{3.38'}$$

Подставляя сюда вместо Φ выражение (3.38) и приравнивая в тождестве (3.38′) коэффициенты членов первой степени нулю, получим, очевидно:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s}\gamma_\sigma = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как определитель $D(0)$ не равен нулю, то все γ_s — нули, а следовательно, $\Phi_1 \equiv 0$.

Приравнивая теперь в тождестве (3.38′) нулю коэффициенты при xx_s и yy_s, получим следующие условия:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s} a_\sigma + \lambda b_s = 0, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s} b_\sigma - \lambda a_s = 0,$$

которые, как мы уже неоднократно делали в аналогичных случаях, можно переписать в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s} (a_\sigma + ib_\sigma) - \lambda i (a_s + ib_s) = 0.$$

Но определитель этой системы есть $D(\lambda i)$ и он не равен нулю по условию теоремы. Поэтому все $a_s + ib_s$, а значит и все a_s, b_s, равны нулю.

Наконец, приравнивая нулю коэффициенты при x^2, xy, y^2 в тождестве (3.38′), мы получим

$$b = 0, \qquad a - c = 0,$$

а так как по условию теоремы функция Φ_2 должна содержать члены с x и y, то $a = c \neq 0$ и, следовательно, функция Φ_2 имеет вид

$$\Phi_2 = a(x^2 + y^2) + \sum_{s,\ \sigma=1}^{n} a_{s\sigma} x_s x_\sigma.$$

Поэтому интеграл системы (3.36) действительно имеет вид (3.37′), что мы и хотели показать.

Имея интеграл системы (3.36) в виде (3.37′), вводим теперь в этот интеграл вместо переменных x, y, x_s переменные r, ϑ, z_s при помощи подстановки (3.19). Тогда извлечением квадратного корня выведем из интеграла (3.37′) следующий:

$$r + r\Psi(r, \vartheta \mid z_\sigma) = \text{const}, \tag{3.39}$$

где Ψ — голоморфная функция величин r, z_s, уничтожающаяся при одновременном равенстве их нулю и обладающая в своем разложении периодическими относительно ϑ коэффициентами, являющимися конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Очевидно, что равенство (3.39) есть интеграл уравнений (3.20), к которым сделанной подстановкой приводится система (3.36) (совпадающая с системой (3.17)).

Чтобы доказать теперь сформулированную выше теорему Ляпунова, допустим, что периодическое решение не существует и что при составлении рядов (3.21), удовлетворяющих уравнениям (3.20), это обнаруживается в первый раз в членах m-го порядка. Следовательно, все коэффициенты $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$ — периодические функции, а коэффициент $u^{(m)}$ имеет вид

$$u^{(m)} = g\vartheta + v,$$

где g — отличная от нуля постоянная, а v — периодическая функция.

В этом предположении делаем в (3.39) подстановку

$$r = c + u^{(2)}c^2 + \ldots + u^{(m-1)}c^{m-1} + u^{(m)}c^m,$$
$$z_s = u_s^{(1)}c + u_s^{(2)}c^2 + \ldots + u_s^{(m-1)}c^{m-1},$$

и результат подстановки располагаем по степеням c.

Так как (3.39) есть интеграл системы (3.20), то по самому определению величин u в результате должны выйти постоянными все члены, содержащие c в степенях ниже $(m+1)$-й. Но это, по крайней мере для члена с m-й степенью c, очевидно, невозможно, так как для функции $r\Psi$ такой член необходимо будет периодическим, и следовательно, наверное, не даст постоянной величины в сумме с членом $(g\vartheta + v)c^m$ функции r.

Мы должны поэтому заключить, что наше допущение неверно и что, следовательно, как бы далеко ни были продолжаемы ряды (3.21), все члены в них необходимо будут выходить периодическими функциями ϑ.

Но тогда, как было доказано выше, ряды эти будут абсолютно сходящимися при всех вещественных значениях ϑ и при $|c|$, не превышающем известного предела, и представляют действительно периодическое решение уравнений (3.20).

А тогда уравнения (3.36) обязательно будут иметь периодическое решение вида (3.36′), и теорема доказана.

Примечание. Мы предполагали до сих пор, что уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет равных нулю корней. Однако, как замечает А. М. Ляпунов в своем сочинении, периодические решения могут существовать и при наличии нулевых корней, если только выполняются некоторые дополнительные условия.

Точно так же А. М. Ляпунов отметил, что предположение о том, что уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет корней вида $m\lambda i$, тоже не является существенным и периодические решения могут существовать и в этих случаях. Сам Ляпунов ограничивается доказательством той теоремы, которая изложена выше в этой книге, и общего доказательства не приводит.

Это общее доказательство дано Ю. А. Рябовым *), который подробно рассмотрел случаи, не разобранные Ляпуновым, и

*) Ю. А. Рябов, Обобщение одной теоремы А. М. Ляпунова, Учен. зап. МГУ, «Математика», т. VII, вып. 165, 1954. В этой статье рассмотрены также и некоторые другие вопросы теории периодических решений.

выявил некоторые достаточно общие условия существования периодических решений систем Ляпунова вида (3.36), не налагая никаких ограничений на корни определяющего уравнения $D(\varkappa)=0$.

6. Если существование периодического решения, соответствующего паре чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ определяющего уравнения, заранее обеспечено, то ряды, представляющие такое решение, всегда могут быть найдены, причем для их вычисления не нужно даже делать те предварительные преобразования, которые требовались для доказательства общей теоремы.

Действительно, пусть нам известно, что определяющее уравнение системы (3.12) имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и что периодическое решение вида (3.35′) действительно существует. Тогда можем поступать следующим образом: положим

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty} h_k c^k\right), \tag{3.40}$$

где h_k обозначают некоторые неопределенные коэффициенты, и введем в уравнения (3.12) новую переменную τ посредством подстановки

$$\tau=\frac{2\pi(t-t_0)}{T}. \tag{3.40′}$$

Полученные преобразованные уравнения

$$\frac{dx_s}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}\left[1+\sum_{k=2}^{\infty} h_k c^k\right]\left\{\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}x_\sigma+\bar{X}_s\right\} \tag{3.41}$$

стараемся удовлетворить рядами вида

$$x_s=\sum_{k=1}^{\infty} c^k x_s^{(k)}(\tau), \tag{3.41′}$$

где все коэффициенты обозначают не зависящие от c функции τ. Подставляя для этого ряды (3.41′) в уравнения (3.41) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c в левых и правых частях равенств, мы получим для определения неизвестных коэффициентов следующие системы уравнений:

$$\frac{dx_s^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}x_s^{(1)} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.42}$$

и для $m>1$:

$$\frac{dx_s^{(m)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}x_s^{(m)}+\frac{h_{m-1}}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}x_s^{(1)}+\frac{1}{\lambda}X_s^{(m)}, \tag{3.42′}$$

где $X_s^{(m)}$ — известные целые рациональные функции от тех $x_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, и тех h_j, для которых $j < m - 1$. Из этих уравнений последовательно находим функции $x_s^{(m)}$ в порядке возрастания m, распоряжаясь при вычислениях неопределенными коэффициентами h_j таким образом, чтобы все $x_s^{(m)}$ выходили периодическими функциями τ с общим периодом 2π.

Посмотрим, как найти функции $x_s^{(1)}$, $x_s^{(2)}$, ...

Как уже было показано в § 1 этой главы, однородные уравнения (3.42) имеют периодическое решение, соответствующее паре чисто мнимых корней, и это решение запишется в нашем случае (т. е. для линейной системы с независимой переменной τ) следующим образом:

$$x_s^{(1)} = a_s \cos\tau + b_s \sin\tau \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.43}$$

где a_s и b_s — некоторые постоянные. Для определения этих постоянных подставим выражения (3.43) в уравнения (3.42) и сравним коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$ в обеих частях равенств. Тогда получим следующие уравнения:

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} a_\sigma = \lambda b_s, \quad \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} b_\sigma = -\lambda a_s, \tag{3.43$'$}$$

которые (так же как мы поступали и ранее в подобных случаях) перепишем в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} (a_\sigma + ib_\sigma) + \lambda i (a_s + ib_s) = 0. \tag{3.43$''$}$$

Но определитель этой системы, как легко видеть, есть $\bar{D}(-\lambda i)$ и равен нулю по условию. Поэтому уравнения (3.43″) имеют решения, в которых не все $a_s + ib_s$ равны нулю. Найдя это решение, получим сейчас же a_s и b_s, и функции $x_s^{(1)}$ будут полностью определены.

Заметим, что так как $\pm\lambda i$, по условию, являются простыми корнями определяющего уравнения, то постоянные a_s и b_s определятся с точностью до неопределенного множителя, которым мы можем распорядиться по своему произволу. Например, мы можем принять этот множитель просто равным единице.

После этого рассматриваем систему (3.42′) для $m = 2$, причем эта система еще не содержит никакой неопределенной постоянной h_j. Так как свободные члены $X_s^{(2)}$ зависят только от $x_s^{(1)}$, то они могут считаться известными периодическими функциями τ, представляемыми конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей τ (эти кратности будут, очевидно, не выше 2).

Так как определяющее уравнение рассматриваемой системы не имеет корней вида $m\lambda i$, то, как показано в § 1, эта система будет иметь единственное, вполне определенное периодическое решение, имеющее такую же структуру, как и функции $X_s^{(2)}$, представляющие свободные члены уравнений.

После этого перейдем к системе (3.42′), определяющей функции $x_s^{(3)}$ и содержащей первую из неопределенных постоянных — h_2, которую и нужно выбрать так, чтобы все $x_s^{(3)}$ вышли периодическими. Мы покажем, как выбирается постоянная h_j в общем случае. Допустим, что все функции $x_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, и все постоянные h_j, для которых $j < m-1$, уже определены, так что все определенные функции оказались периодическими, и посмотрим, как найдутся функции $x_s^{(m)}$ и постоянная h_{m-1}.

Нетрудно видеть, имея в виду формулы (3.43′), что уравнения (3.42′) могут быть переписаны в виде

$$\frac{dx_s^{(m)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma^{(m)} + h_{m-1}(b_s\cos\tau - a_s\sin\tau) + \frac{1}{\lambda}X_s^{(m)}, \tag{3.44}$$

где $X_s^{(m)}$ — известные функции, являющиеся конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей τ (как легко видеть, эти кратности не выше числа m), которые представим в виде

$$X_s^{(m)} = A_{sm}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m}\left(A_{sm}^{(k)}\cos k\tau + B_{sm}^{(k)}\sin k\tau\right),$$

где все коэффициенты — известные постоянные.

Поступая так же, как и в § 1, ищем решение системы (3.44) в виде такой же суммы

$$x_s^{(m)} = a_{sm}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m}\left(a_{sm}^{(k)}\cos k\tau + b_{sm}^{(k)}\sin k\tau\right)$$

с неопределенными коэффициентами. Тогда, как показано в § 1, все коэффициенты $a_{sm}^{(k)}$ и $b_{sm}^{(k)}$, для которых $k \neq 1$, могут быть однозначно определены. Что же касается коэффициентов $a_{sm}^{(1)}$ и $b_{sm}^{(1)}$, то уравнения, их определяющие, будут обладать некоторой особенностью, вследствие чего вычисление этих коэффициентов требует отдельного и более внимательного рассмотрения *).

*) В первом издании этой книги автором была допущена в этом месте некоторая неточность, которая была впоследствии замечена Г. И. Ширминым (см. журнал «Небесная механика», т. 10, 1974 г.), которому автор очень признателен. В этом издании изложение указанного особенного случая взято из упомянутой работы Г. И. Ширмина.

Система уравнений, определяющих постоянные коэффициенты $a_{sm}^{(1)}$, $b_{sm}^{(1)}$ и неопределенную постоянную h_{m-1}, может быть написана, аналогично системе (3.43), в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}\left(a_{\sigma m}^{(1)} + ib_{\sigma m}^{(1)}\right) + \lambda i\left(a_{sm}^{(1)} + ib_{sm}^{(1)}\right) =$$
$$= \lambda h_{m-1}\left(-b_s + ia_s\right) - \left(A_{sm}^{(1)} + iB_{sm}^{(1)}\right) \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2). \tag{3.45}$$

Постоянная h_{m-1} должна быть теперь выбрана так, чтобы уравнения (3.45) с неизвестными $a_{sm}^{(1)} + ib_{sm}^{(1)}$ были совместны.

Но согласно известной теореме Кронекера — Капелли система линейных уравнений (3.45) будет совместна только в том случае, когда ранг расширенной матрицы $\bar{Q}$, определяемой формулой

$$\bar{Q} = \left\| \begin{array}{lll|ll} \bar{p}_{11} + \lambda i, & \ldots, & \bar{p}_{1,\,n+1}, & \bar{p}_{1,\,n+2}, & q_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{p}_{n+1,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+1,\,n+1} + \lambda i, & \bar{p}_{n+1,\,n+2}, & q_{n+1,\,m} \\ \hline \bar{p}_{n+2,\,1}, & \ldots, & p_{n+2,\,n+1}, & p_{n+2,\,n+2} + \lambda i, & q_{n+2,\,m} \end{array} \right\|,$$

где

$$q_{sm} = \lambda h_{m-1}\left(-b_s + ia_s\right) - \left(A_{sm}^{(1)} + iB_{sm}^{(1)}\right), \tag{3.45'}$$

равен рангу матрицы Q, образованной из коэффициентов системы (3.45):

$$Q = \left\| \begin{array}{lll|l} \bar{p}_{11} + \lambda i, & \ldots, & \bar{p}_{1,\,n+1}, & \bar{p}_{1,\,n+2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{p}_{n+1,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+1,\,n+1} + \lambda i, & \bar{p}_{n+1,\,n+2} \\ \hline \bar{p}_{n+2,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+2,\,n+1}, & \bar{p}_{n+2,\,n+2} + \lambda i \end{array} \right\|.$$

Определитель матрицы Q равен нулю и, следовательно, ранг этой матрицы меньше ее порядка $n+2$. Можно считать, для определенности, что ранг Q равен $n+1$ и диагональный минор M_{n+1} (в матрицах $\bar{Q}$ и Q он выделен окантовкой) отличен от нуля. Для выполнения условия

$$\text{Ранг}\,\bar{Q} = \text{Ранг}\,Q$$

необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю характеристические определители системы (3.45) — миноры $(n+2)$-го порядка матрицы $\bar{Q}$, окаймляющие отличный от нуля минор M_{n+1} и не содержащиеся в матрице Q.

Из выражений для $\bar{Q}$ и Q видно, что система (3.45) имеет лишь один характеристический определитель:

$$H = \left| \begin{array}{llll} \bar{p}_{11} + \lambda i, & \ldots, & \bar{p}_{1,\,n+1}, & q_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{p}_{n+1,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+1,\,n+1} + \lambda i, & q_{n+1,\,m} \\ \bar{p}_{n+2,\,1}, & \ldots, & p_{n+2,\,n+1}, & q_{n+2,\,m} \end{array} \right|.$$

Разлагая определитель H по элементам последнего столбца и приравнивая результат нулю, имеем в силу (3.45′)

$$\lambda h_{m-1} \sum_{\sigma=1}^{n+2} (-b_\sigma + ia_\sigma) H_{\sigma, n+2} = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \left(A_{\sigma m}^{(1)} + iB_{\sigma m}^{(1)}\right) H_{\sigma, n+2}, \tag{3.46}$$

где $H_{\sigma, n+2}$ — алгебраические дополнения элементов последнего столбца определителя H, которые, как легко проверить, совпадают с алгебраическими дополнениями $Q_{\sigma, n+2}$ элементов последнего столбца определителя матрицы Q.

Полагая

$$R_{\sigma, n+2} = R(Q_{\sigma, n+2}), \quad I_{\sigma, n+2} = J(Q_{\sigma, n+2}) \tag{3.47}$$

(R и J обозначают вещественную и мнимую части величины $Q_{\sigma, n+2}$) и приравнивая в (3.46) вещественные и мнимые части, мы получим

$$-\lambda h_{m-1} \sum_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma I_{\sigma, n+2} + b_\sigma R_{\sigma, n+2}) = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \left(A_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2} - B_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2}\right),$$

$$+\lambda h_{m-1} \sum_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma R_{\sigma, n+2} - b_\sigma I_{\sigma, n+2}) = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \left(A_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2}\right).$$

В последние два уравнения входит единственная неизвестная величина — неопределенный коэффициент h_{m-1}, и так как эти равенства получены из условия совместности уравнений (3.45), то отсюда имеем, например

$$h_{m-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{\sum\limits_{\sigma=1}^{n+2} \left(A_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2}\right)}{\sum\limits_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma R_{\sigma, n+2} - b_\sigma I_{\sigma, n+2})}. \tag{3.48}$$

Из этих же уравнений следует, что соотношение

$$-\frac{\sum\limits_{\sigma=1}^{n+2} \left(A_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2}\right)}{\sum\limits_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma I_{\sigma, n+2} + b_\sigma R_{\sigma, n+2})} = \frac{\sum\limits_{\sigma=1}^{n+2} \left(A_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2}\right)}{\sum\limits_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma R_{\sigma, n+2} - b_\sigma I_{\sigma, n+2})}, \tag{3.48′}$$

связывающее коэффициенты $\bar{p}_{s\sigma}$ и коэффициенты разложений функций $X_s^{(m)}$, выполняется автоматически.

Найдя величину h_{m-1}, обращаемся опять к системе (3.45), которая является неопределенной, так как ее ранг меньше порядка. Поэтому, одну из неизвестных $a_{sm}^{(1)} + ib_{sm}^{(1)}$ можно выбрать произвольным образом, вследствие чего система (3.45) превращается в определенную систему $(n+1)$-го порядка с таким же числом неизвестных. Решая эту систему, мы и найдем все искомые величины $a_{sm}^{(1)}$, $b_{sm}^{(1)}$, а поэтому все функции $x_s^{(m)}$ определятся единственным образом и выйдут периодическими относительно τ с общим периодом 2π.

Следовательно, ряды (3.41′) действительно определят искомое периодическое решение уравнений (3.12).

Подставляя в эти ряды вместо $x_s^{(m)}$ их выражения, мы получим искомое периодическое решение в следующем виде:

$$x_s = c\,(a_s \cos\tau + b_s \sin\tau) + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} c^m \left[a_{sm}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_{sm}^{(k)} \cos k\tau + b_{sm}^{(k)} \sin k\tau\right)\right], \qquad (3.41'')$$

а так как эти ряды сходятся абсолютно при значениях $|c|$, не превышающих некоторого предела, и при всех вещественных значениях τ (или, что то же, при всяком значении t), то решение (3.41′) путем перестановки членов можно также представить в следующем виде:

$$x_s = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\alpha_s^{(m)} \cos m\tau + \beta_s^{(m)} \sin m\tau\right), \qquad (3.41''')$$

где все коэффициенты $\alpha_s^{(m)}$ и $\beta_s^{(m)}$ — голоморфные функции постоянной c, уничтожающиеся при $c=0$.

Заметим, что если бы существование периодического решения нам не было известно заранее, то это обстоятельство все же не могло бы помешать нам применить указанный прием вычисления.

Притом, если бы, доведя вычисления до какого-либо m, мы нашли, что соответствующие ему условия (3.48′) не выполняются, то это явилось бы признаком того, что система (3.12) не имеет периодического решения (по крайней мере рассматриваемого здесь вида). Но если бы, как бы далеко мы ни шли в вычислениях, все функции $x_s^{(m)}$ выходили бы периодическими, то эти вычисления ничего доказать не могли бы и разрешить таким способом нашу задачу было бы невозможно.

Примечание. В задачах небесной механики дифференциальные уравнения движения обыкновенно задаются в виде системы уравнений второго порядка, вследствие чего и уравнения, соответствующие уравнениям (3.12), также будут представлять вообще систему уравнений второго порядка. Как известно, мы всегда можем заменить такую систему равносильной ей системой уравнений первого порядка, которой всегда можно придать нормальную форму (3.12).

Однако для разыскания периодических решений по изложенному выше способу такое приведение к системе первого порядка вовсе не является необходимым, и мы можем применить способ Ляпунова непосредственно к первоначальной системе уравнений второго порядка. Ниже, во второй части книги, это замечание будет нами использовано.

7. Для задач небесной механики весьма важен случай, когда исходные уравнения (3.12) имеют каноническую форму

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \tag{3.49}$$

где характеристическая функция предполагается голоморфной функцией величин x_s, y_s, в которой члены наинизшего порядка образуют квадратичную форму H_2.

Как известно, система (3.49) всегда имеет интеграл

$$H(x_\sigma \mid y_\sigma) = \text{const}, \tag{3.50}$$

не зависящий от t и голоморфный относительно x_s и y_s. Поэтому, если определяющее уравнение, соответствующее системе (3.49) имеет хотя бы одну пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и не имеет корней вида $m\lambda i$, то определитель формы H_2 заведомо будет отличен от нуля и по теореме раздела 5 система (3.49) обязательно будет иметь периодическое решение с двумя произвольными постоянными (и с периодом, зависящим от одной произвольной постоянной).

Притом, если определяющее уравнение имеет только чисто мнимые корни $\pm\lambda_s i$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, то всякий раз, когда числа λ_s таковы, что ни одно из отношений, которые можно из них составить, комбинируя их по два, не представляет целого числа, для нашей канонической системы найдется n периодических решений, содержащих по две произвольные постоянные каждое.

В каждом из этих решений функции x_s, y_s выйдут периодическими функциями времени с периодом

$$T_j = \frac{2\pi}{\lambda_j}\left\{1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} h_j^{(\sigma)} c_j^k\right\} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.51}$$

где все h обозначают числа, не зависящие от произвольных постоянных, а

$$c_j = H_j\left(x_j^{(0)}, y_j^{(0)}\right).$$

Мы закончим на этом изложение теории периодических решений, созданной А. М. Ляпуновым, имея в виду, что для приложения к задачам небесной механики, которые будут рассмотрены ниже, изложенных теорем вполне достаточно.

Пример. Для иллюстрации теоремы Ляпунова и его метода нахождения периодического решения рассмотрим простой пример. Пусть дано уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + x = 4\mu x^3,$$

в котором μ означает какую-либо вещественную постоянную.

Это уравнение можно также переписать в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -x + 4\mu x^3,$$

или в виде канонической системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

где функция Гамильтона H определяется формулой:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \mu x^4.$$

Отсюда сейчас же следует, что наша система имеет первый интеграл

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \mu x^4 = \text{const},$$

который, очевидно, полностью удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле.

Поэтому предложенная система заведомо имеет периодическое решение, в котором x и y (или x и $\dot{x}$) представляются рядами, расположенными по степеням произвольной постоянной c, и коэффициенты которых суть периодические функции времени с общим периодом T, являющимся также голоморфной функцией постоянной c.

Это решение проще всего искать непосредственно из данного уравнения второго порядка.

Так как в нашем случае можно принять $\lambda = 1$, а за произвольную постоянную c принять значение функции x при $t = 0$, то задача сводится к нахождению периодического решения в виде ряда

$$x = cx_1 + c^2x_2 + c^3x_3 + \ldots,$$

где все коэффициенты суть периодические функции вспомогательной переменной

$$\tau = \frac{2\pi t}{T}$$

с общим периодом 2π, определяемые условиями

$$x_1(0)=1, \quad \dot{x}_1(0)=0,$$
$$x_k(0)=0, \quad \dot{x}_k(0)=0, \qquad k>1.$$

Период по времени T также имеет вид ряда, расположенного по степеням c,

$$T=2\pi(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots)$$

с неопределенными коэффициентами

$$h_2, \quad h_3, \ldots,$$

которые должны быть определены так, чтобы все функции x_k выходили периодическими с общим периодом 2π.

Переходя в предложенном уравнении от независимой переменной t к τ, получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=(-x+4\mu x^3)(1+h_2c^2+\ldots)^2,$$

подставляя в которое вместо x ряд, имеем

$$\ddot{x}_1c+\ddot{x}_2c^2+\ddot{x}_3c^3+\ldots+(x_1c+x_2c^2+x_3c^3+\ldots)(1+h_2c^2+\ldots)^2=$$
$$=4\mu(x_1c+x_2c^2+\ldots)^3(1+h_2c^2+\ldots)^2.$$

Сравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях c, получим бесконечную последовательность уравнений

$$\ddot{x}_1+x_1=0,$$
$$\ddot{x}_2+x_2=0,$$
$$\ddot{x}_3+x_3=-2x_1h_2+4\mu x_1^3+12\mu x_1^2x_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

из которых последовательно находим прежде всего

$$x_1=\cos\tau, \quad x_2=0,$$

после чего уравнение для x_3 напишется в виде

$$\ddot{x}_3+x_3=-2h_2\cos\tau+4\mu\cos^3\tau=-2h_2\cos\tau+\frac{\mu}{2}(\cos\tau+\cos 3\tau).$$

Чтобы частное решение этого неоднородного уравнения не содержало члена, имеющего множителем τ, необходимо, чтобы

$$-2h_2+\frac{\mu}{2}=0,$$

откуда находим первый неопределенный коэффициент h_2:

$$h_2=\frac{\mu}{4}.$$

Затем, интегрируя уравнение для x_3 при условии, что

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0,$$

находим без труда

$$x_3 = -\frac{\mu}{2}\cos\tau + \frac{\mu}{2}\cos 3\tau.$$

Подобным же образом находятся и следующие функции x_4, x_5, ... и следующие неопределенные коэффициенты h_3, h_4, ...

Итак, искомое периодическое решение будет иметь вид

$$x = c\cdot\cos\tau + \frac{\mu}{2}(\cos 3\tau - \cos\tau)\cdot c^3 + \ldots,$$

где

$$\tau = 2\pi\left(1 + \frac{\mu}{4}c^2 + \ldots\right)^{-1}\cdot t,$$

и предложенный пример решен.

§ 3. Метод малого параметра А. Пуанкаре

1. Для большей простоты и краткости мы рассмотрим задачу Пуанкаре только с одним малым параметром. Пусть исходные уравнения задачи имеют вид, подобный (3.1):

$$\dot{z}_s = Z_s(t\,|\,z_\sigma\,|\,\mu) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.52}$$

причем правые части уравнений голоморфны относительно μ, по крайней мере при достаточно малых значениях $|\mu|$, и являются периодическими функциями времени с одним и тем же вещественным периодом ω, так что

$$Z_s(t+\omega\,|\,z_\sigma\,|\,\mu) \equiv Z_s(t\,|\,z_\sigma\,|\,\mu) \tag{3.52$'$}$$

при любом значении t и для всякого μ.

Предположим, что при $\mu = 0$ уравнения (3.52) или возможно проинтегрировать полностью, или, по крайней мере, возможно найти частное периодическое решение этих уравнений, обладающее тем же самым периодом ω.

Пусть

$$\tilde{z}_s = f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.53}$$

где $f_s(t+\omega) = f_s(t)$ есть такое решение, так что имеем

$$\dot{\tilde{z}}_s \equiv Z_s(t\,|\,\tilde{z}_\sigma\,|\,0) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k). \tag{3.53$'$}$$

Решение (3.53), которое будем называть, как это теперь принято, «порождающим решением», может содержать также и некоторое количество произвольных постоянных, т. е. может образовывать семейство периодических решений, но может быть также и изолированным.

Обозначим начальные значения величин $\tilde{z}_s$, соответствующих периодическому решению (3.53), через $\tilde{z}_s^{(0)}$, т. е. положим $\tilde{z}_s^{(0)} = f_s(t_0)$.

Тогда проблема, поставленная Пуанкаре, заключается в следующем:

Требуется установить, имеют ли исходные уравнения (3.52) *периодическое решение с тем же периодом* ω, *обращающееся при* $\mu = 0$ *в порождающее периодическое решение* (3.53), *и если такое решение существует, то найти его.*

Допустим, что система (3.52) имеет подобное периодическое решение и что ему соответствуют начальные значения $z_s^{(0)}$ неизвестных функций z_s.

Полагая, как и ранее,

$$z_s = \tilde{z}_s + x_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.54}$$

мы получим для определения отклонений (или «возмущений») x_s функций z_s от их значений в порождающем решении систему уравнений нормального вида

$$\dot{x}_s = X_s(t \mid x_\sigma \mid \mu), \tag{3.55}$$

где все X_s — периодические функции с периодом ω, голоморфные относительно параметра μ. Мы будем, сверх того, предполагать, что первоначальные уравнения (3.52) и порождающее решение (3.53) таковы, что величины X_s суть голоморфные функции также и от величин x_s, по крайней мере при численно достаточно малых значениях этих величин. Вообще, как это было уже условлено в § 4 главы I, мы всегда будем предполагать правые части X_s уравнений (3.55) такими функциями t, x_s и μ, чтобы выполнялись все условия общей теоремы Ляпунова, доказанной в § 4 главы I.

Поэтому мы можем представить общее решение уравнений (3.55), в силу указанной теоремы Ляпунова, в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням произвольных постоянных и параметра μ, которые напишем, обозначая здесь по традиции произвольные постоянные через β_s, следующим образом (см. формулировку теоремы Пуанкаре в главе I):

$$x_s = \sum_{m_1 + \ldots + m_k + m \geqslant 1} P_s^{(m_1, \ldots, m_k, m)}(t)\, \beta_1^{m_1} \ldots \beta_k^{m_k} \mu^m, \tag{3.55'}$$

где все коэффициенты суть непрерывные функции времени.

Так как по теореме Ляпунова ряды (3.55′) сходятся абсолютно для всякого значения t, содержащегося в некотором промежутке, пока величины $|\beta_s|$, $|\mu|$ не превосходят некоторого предела, зависящего от упомянутого промежутка, то всегда можно найти такой предел $g(\omega)$, что ряды (3.55′) будут абсолютно сходящимися для всякого значения t в промежутке $(t_0, t_0+\omega)$ и для всяких β_s и μ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\beta_s| \leqslant g(\omega), \qquad |\mu| \leqslant g(\omega). \tag{3.55''}$$

Посмотрим теперь, нельзя ли выбрать произвольные постоянные β_s так, чтобы все ряды (3.55′) были периодическими функциями от t с тем же самым периодом ω.

Для этого должны, очевидно, выполняться следующие условия:

$$\psi_s(\beta_\sigma \mid \mu) \equiv x_s(t_0+\omega \mid \beta_\sigma \mid \mu) - x_s(t_0 \mid \beta_\sigma \mid \mu) = 0, \tag{3.56}$$

которые являются необходимыми и достаточными для существования периодического решения системы (3.55).

В самом деле, если формулы (3.55′) определяют периодическое решение, то условия (3.56), очевидно, выполняются. Обратно, если условия (3.56) выполнены, то значения функций x_s, удовлетворяющих уравнениям (3.55), в момент t_0 и в момент $t_0+\omega$ будут одинаковы, а следовательно, решение (3.55′) действительно будет периодическим.

Рассмотрим теперь уравнения (3.56), представляющие собой условия периодичности. Эти условия дают систему k уравнений, в которых величины β_s можем рассматривать как неизвестные, а параметр μ — как независимую переменную.

Применяя теперь к уравнениям (3.56) общую теорему о неявных функциях, установленную в главе I, мы можем утверждать, что если функциональный определитель

$$\Delta(\beta_\sigma \mid \mu) = \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)}{D(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)} \tag{3.56'}$$

не обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$, то уравнения (3.56) имеют единственное решение, голоморфное относительно параметра μ, уничтожающееся при $\mu = 0$.

Это решение представится рядами вида

$$\beta_s = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_s^{(j)} \mu^j \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.57}$$

абсолютно сходящимися, пока $|\mu|$ не превосходит некоторого предела, меньшего или равного $g(\omega)$.

Подставляя выражения (3.57) для β_s в формулы (3.55′), мы получим единственное решение системы (3.55), голоморфное относительно параметра μ и уничтожающееся при $\mu = 0$. Это решение, периодическое в силу самого способа его получения, можно написать, следовательно, в виде

$$x_s = \sum_{j=1}^{\infty} x_s^{(j)}(t) \cdot \mu^j \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.58}$$

где все коэффициенты — периодические функции t с периодом ω. А отсюда по формулам (3.54) найдем и периодическое решение системы (3.52), обращающееся в порождающее решение $f_s(t)$ при $\mu = 0$. Поэтому начальные значения величин z_s в этом периодическом решении определятся формулами

$$z_s^{(0)} = f_s(t_0) + \sum_{j=1}^{\infty} x_s^{(j)}(t_0) \cdot \mu^j \tag{3.58'}$$

и также, конечно, являются голоморфными функциями параметра μ, по крайней мере при численно достаточно малых его значениях.

Полученный результат и составляет содержание общей теоремы Пуанкаре о существовании периодических решений системы (3.52), близких к порождающему периодическому решению, которую полезно сформулировать отдельно.

Теорема Пуанкаре. *Если функциональный определитель $\Delta(\beta_\sigma|\mu)$, соответствующий рассматриваемому порождающему решению, не равен нулю при $\beta_s = \mu = 0$, то, по крайней мере при достаточно малых значениях $|\mu|$, система* (3.52) *имеет единственное периодическое решение, голоморфное относительно μ и обращающееся в порождающее решение при $\mu = 0$.*

Для фактического нахождения периодического решения, если известно, что оно существует, проще всего воспользоваться рядами (3.58), рассматривая в них все величины $x_s^{(j)}$ как неопределенные коэффициенты.

Чтобы определить эти коэффициенты, подставим ряды (3.58) в уравнения (3.55), которые более подробно напишутся в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma} x_\sigma + p_s \mu + \sum_{m=2}^{\infty} X_s^{(m)}(t \,|\, x_\sigma \,|\, \mu), \tag{3.59}$$

где все коэффициенты — периодические функции от t с общим периодом ω. Тогда сравнение коэффициентов при одинаковых степенях μ в левых и правых частях равенств даст следующие уравнения:

$$\dot{x}_s^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma} x_\sigma^{(1)} + p_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.60}$$

и для $j > 1$:

$$\dot{x}_s^{(j)} = \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma} x_\sigma^{(j)} + R_s^{(j)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.60'}$$

где свободные члены — целые многочлены относительно тех $x_s^{(i)}$, для которых $i < j$. Поэтому все $x_s^{(j)}$ найдутся последовательно, в порядке возрастания j из однотипных систем неоднородных линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

При этом нам вовсе не требуется полностью интегрировать каждую из этих систем, но достаточно найти для каждой из них частное периодическое решение. Если такие периодические решения найдутся для каждой из систем (3.60), (3.60′), то ряды (3.58) выйдут периодическими и действительно представят искомое периодическое решение.

Однако если существование периодического решения нам заранее не известно, то описанная процедура приведет к цели только в том случае, когда ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным, т. е. когда периодическое решение рассматриваемого типа не существует.

Из раздела 3 § 1 этой главы следует, что периодическое решение каждой из систем (3.60), (3.60′) обязательно найдется, если характеристичное уравнение линейной однородной системы с коэффициентами $p_{s\sigma}$ имеет корень, модуль которого равен единице, т. е. если среди характеристических показателей упомянутой линейной системы есть равный нулю.

Последнее условие, как следует из раздела 3 § 3 главы I, приводится к тому, чтобы матрица, элементами которой являются числа $x_{s\sigma}(t_0+\omega)$, была единичной матрицей.

Примечание 1. Если не найдется периодического решения с периодом ω, то аналогичным образом можно искать периодическое решение системы (3.55) с периодом, представляющим целую кратность ω. Для этого можно пользоваться теми же рядами (3.55′), но условия периодичности нужно написать в виде

$$\tilde{\psi}_s(\beta_\sigma\,|\,\mu)=x_s(t_0+p\omega\,|\,\beta_\sigma\,|\,\mu)-x_s(t_0\,|\,\beta_\sigma\,|\,\mu)=0.$$

Разумеется, что сходимость рядов (3.55′) соответствующим выбором величин $|\beta_s|$ и $|\mu|$ должна быть обеспечена для всякого значения t в промежутке $(t_0,\ t_0+p\omega)$, где p — заданное целое положительное число.

При этом, если якобиан от функций $\tilde{\psi}_s$ по β_σ не будет нулем при $\beta_s=\mu=0$, то периодическое решение, обладающее периодом $p\omega$, заведомо существует. Это решение может быть найдено таким же путем, как было описано выше.

Примечание 2. Метод Пуанкаре может быть без всякого затруднения обобщен на случай системы самого общего вида, типа системы (1.82), которую мы рассматривали в главе I.

Общее решение такой системы может быть определено формулами типа (1.87), которые дают функции z_s в виде рядов, расположенных по степеням произвольных постоянных и ν разностей $\mu_j-\mu_j^{(0)}$. Условия периодичности решения системы (1.82) будут иметь вид

$$\Psi_s(\beta_\sigma | \mu_j - \mu_j^{(0)}) = 0$$

и опять могут быть рассматриваемы как уравнения с k неизвестными функциями и ν независимыми переменными.

Поэтому к этим уравнениям можем применить общую теорему о неявных функциях и утверждать, что если якобиан функций Ψ_s по величинам β_σ отличен от нуля, когда все переменные (зависимые и независимые) полагаются равными нулю, то система (1.82) действительно имеет периодическое решение, представляемое рядами, расположенными по степеням разностей $\mu_j - \mu_j^{(0)}$, все коэффициенты которых — периодические функции времени с одним и тем же периодом ω, какой имеют и правые части системы (1.82).

Эти ряды будут абсолютно сходящимися для всех действительных значений t, пока разности $\mu_j - \mu_j^{(0)}$ остаются численно достаточно малыми.

Это решение может быть найдено таким же путем, как и в предыдущих, более простых случаях, только выкладки будут более сложными и громоздкими.

Таким же путем можно найти и периодические решения с периодом $p\omega$, где p — целое число.

2. Возвращаясь к основной задаче Пуанкаре, т. е. к уравнениям (3.52), рассмотрим теперь случай, когда определитель $\Delta(\beta_\sigma | \mu)$ обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$.

В этом случае вопрос о разрешимости уравнений (3.56), а вместе с тем и вопрос о существовании периодических решений, становится чрезвычайно сложным и не разобран во всех подробностях и по настоящее время. Мы рассмотрим только два простейших случая этой задачи, которые исследовал сам Пуанкаре в своей знаменитой монографии и которые являются наиболее характерными в теории периодических решений.

Допустим сначала, что первоначальная система (3.52) имеет при $\mu = 0$ не одно изолированное частное решение, как предполагалось в предыдущем разделе, но ∞^1 периодических решений, образующих семейство с одной произвольной постоянной h. Пусть

$$z_s = f_s(t, h) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.61}$$

будет это семейство, причем рассматриваемое порождающее решение принадлежит к этому семейству и соответствует значению h^* постоянной h (так что h^* есть вполне определенное число). Покажем, что в этом случае определитель $\Delta(\beta_\sigma | \mu)$ необходимо обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$. В самом деле, если бы $\Delta(0 | 0)$ было отлично от нуля, то система уравнений

(3.56) имела бы при $\mu = 0$ единственное решение $\beta_s = 0$ ($s = 1, 2, \ldots, k$).

Но при $\mu = 0$ уравнения (3.56) выражают необходимые и достаточные условия периодичности решения системы (3.53′), получающейся из (3.52) при $\mu = 0$.

Но, так как по предположению система (3.53′) имеет семейство периодических решений, то условиям периодичности должно удовлетворять не только решение $\beta_s = 0$, но и решение

$$\beta_s = f_s(t_0, h) - f_s(t_0, h^*),$$

зависящее от произвольного параметра h, что противоречит вышесказанному.

Таким образом, в рассматриваемом случае определитель $\Delta(0|0)$ действительно необходимо равен нулю.

Чтобы выяснить вопрос о существовании периодического решения системы (3.52), обращающегося в порождающее решение $f_s(t, h^*)$ при $\mu = 0$, допустим, что среди первых миноров якобиана $\Delta(\beta_\sigma|\mu)$ хотя бы один не обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$. Не нарушая общности, можем считать, что этот минор есть якобиан первых $k-1$ функций ψ_s по переменным β_s ($s = 1, 2, \ldots, k-1$).

Тогда так же, как мы это делали в разделе 3 § 2 главы I, мы можем исключить из уравнений (3.56) величины $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$, в результате чего получим единственное уравнение вида

$$\Psi(\beta_k, \mu) = 0, \tag{3.62}$$

из которого нужно определить β_k как функцию параметра μ, обращающуюся в нуль при $\mu = 0$.

Рассмотрим подробнее уравнение (3.62). Функция Ψ, очевидно, голоморфна относительно β_k и μ. Кроме того, она будет зависеть также от параметра h^*, входящего в порождающее решение. Так как при $\mu = 0$ уравнения (3.56) имеют бесчисленное множество решений, зависящих от произвольного параметра, то и уравнение (3.62) должно иметь при $\mu = 0$ бесчисленное множество решений для β_k и, следовательно, должно удовлетворяться тождественно.

Поэтому уравнение (3.62) необходимо имеет вид

$$\mu\overline{\Psi}(\beta_k, \mu, h^*) = 0, \tag{3.62′}$$

где $\overline{\Psi}$ — также голоморфная функция величин β_k и μ, не обращающаяся, вообще говоря, в нуль при $\beta_k = \mu = 0$. Отбрасывая множитель μ и разлагая функцию $\overline{\Psi}$ в ряд, мы напишем последнее уравнение в следующем виде:

$$0 = \overline{\Psi}(0, 0, h^*) + \beta_k\overline{\Psi}'_{\beta_k}(0, 0, h^*) + \mu\overline{\Psi}'_\mu(0, 0, h^*) + \ldots \tag{3.62″}$$

Для того чтобы это уравнение имело решение, обращающееся в нуль при $\mu = 0$, необходимо, чтобы h^* удовлетворяла условию

$$\overline{\Psi}(0,\ 0,\ h^*) = 0, \tag{3.63}$$

и мы приходим к следующему важному результату, установленному Пуанкаре:

Из бесчисленного множества порождающих решений семейства (3.61) *только тем могут соответствовать периодические решения системы* (3.52), *для которых постоянная h является корнем уравнения* (3.63).

Пусть постоянная h имеет значение h^*, удовлетворяющее уравнению (3.63). Если при этом $\overline{\Psi}'_{\beta_k}(0,\ 0,\ h^*) \neq 0$, то мы можем определить из этого уравнения β_k как голоморфную функцию от μ в виде ряда

$$\beta_k = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_k^{(r)}(h^*)\,\mu^r, \tag{3.64}$$

коэффициенты которого зависят от h^* и который сходится абсолютно при достаточно малых значениях $|\mu|$.

Тогда из уравнений

$$\psi_s(\beta_\sigma \mid \mu) = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1),$$

в которых β_k заменено его значением (3.64), однозначно определим все остальные β_s также в виде рядов, расположенных по степеням параметра μ, после чего найдем искомое периодическое решение при помощи формул (3.55′) и (3.54) в виде подобных же рядов.

Может случиться, что значение h^*, являющееся корнем уравнения (3.63), обращает также в нуль величину $\overline{\Psi}'_{\beta_k}(0,\ 0,\ h^*)$. Тогда мы не можем найти из уравнения (3.62″) величину β_k как голоморфную функцию μ, но (как следует из теорем о неявных функциях) рассматриваемое уравнение всегда будет иметь решения, голоморфные относительно $\mu^{\frac{1}{\nu}}$, где ν — целое, положительное число. Если среди таких решений найдется хотя бы одно вещественное, то ему будет соответствовать вещественное периодическое решение системы (3.52), представляющееся рядами, расположенными по степеням $\mu^{\frac{1}{\nu}}$, т. е. по дробным степеням параметра.

Если все первые миноры определителя $\Delta(\beta_\sigma \mid \mu)$ обращаются в нуль при $\beta_s = \mu = 0$, то может случиться, что среди миноров второго порядка есть хотя бы один отличный от нуля, когда все переменные — нули. Этот более сложный случай может быть разобран подобно предыдущему, но на этом анализе мы останавливаться не будем.

Примечание. Результаты, полученные Пуанкаре, могут быть обобщены и дополнены рассмотрением задачи, в которой упрощенная система (3.53′) имеет периодическое решение, зависящее от любого числа произвольных постоянных (меньшего k).

Этот общий случай мы также не будем рассматривать, отсылая читателя к более специальной литературе.

Рассмотрим второй случай Пуанкаре. Мы уже отметили выше, что если не существует изолированное периодическое решение с периодом ω, то может существовать подобное решение с периодом, кратным ω. Это будет случай, когда определитель $\Delta(0|0)$ равен нулю, но аналогичный определитель $\tilde{\Delta}(0|0)$, составленный из функций $\tilde{\psi}_s$, отличен от нуля. Тогда система (3.52) будет иметь единственное изолированное решение с периодом $p\omega$ (p — определенное число).

Если определитель $\Delta(0|0)$ отличен от нуля и определитель $\tilde{\Delta}(0|0)$ также не равен нулю, то существует только одно периодическое решение с периодом ω или, лучше сказать, в этом случае любое решение с периодом $p\omega$ совпадает с решением, которое имеет период ω *).

Допустим теперь, что упрощенная система (3.53′) имеет множество периодических решений вида (3.61) и что некоторому определенному значению h^* постоянной h соответствует также периодическое решение системы (3.52), голоморфное, вообще говоря, относительно $\mu^{\frac{1}{\nu}}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$).

Тогда, как мы уже знаем, определитель $\Delta(0|0)$ равен нулю для любого значения h. Если для этого значения h определитель $\tilde{\Delta}(0|0)$ отличен от нуля, то система (3.52) будет иметь также единственное периодическое решение с периодом $p\omega$ (p — определенное число), которое будет превращаться в порождающее решение при $\mu = 0$.

Может также случиться, что при некотором значении h система (3.52) имеет решение периода ω и при другом значении этой постоянной — периодическое решение с периодом $p\omega$. Тогда соответствующие периодические решения системы (3.52), если они существуют, конечно, не будут совпадать друг с другом при $\mu = 0$.

*) Это следует из того, что решение с периодом ω может быть рассматриваемо так же как решение с периодом $p\omega$ при произвольно выбранном целом p.

Рассмотрим еще случай, когда уравнения (3.52) имеют интеграл

$$F(t \mid z_\sigma \mid \mu) = \text{const}, \tag{3.65}$$

левая часть которого есть периодическая функция времени с периодом ω. В этом случае уравнения $\psi_s = 0$ не будут, вообще говоря, различными.

В самом деле, мы имеем тождественно

$$F\left[t_0 \mid \tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma \mid \mu\right] = F\left[t_0 + \omega \mid \tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \psi_\sigma \mid \mu\right] = \\ = F\left[t_0 \mid \tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \psi_\sigma \mid \mu\right].$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$F\left[t_0 \mid \tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \psi_\sigma \mid \mu\right] - F\left[t_0 \mid \tilde{z}_\sigma + \beta_\sigma \mid \mu\right] = 0, \tag{3.65}$$

левая часть которого может быть разложена в ряд по степеням ψ_s, β_s и μ и уничтожается, когда все ψ_s равны нулю.

Допустим, что производная $F'_{z_k}(t \mid z_\sigma \mid \mu)$ не обращается в нуль, когда положим $z_s = \tilde{z}_s$, $\mu = 0$.

Тогда производная от левой части равенства (3.65′) по ψ_k не будет равна нулю при $\psi_s = 0$, $\beta_s = 0$, $\mu = 0$.

Следовательно, мы можем применить основную теорему о неявных функциях и найти из уравнения (3.65′)

$$\psi_k = \Psi\left(\psi_\sigma \mid \beta_j \mid \mu\right) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k-1),$$

где Ψ — голоморфная функция величин ψ_σ, β_s, μ, обращающаяся в нуль, когда мы положим $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{k-1} = 0$. Поэтому k-е из уравнений (3.56) будет следствием $k-1$ первых.

Следовательно, определитель $\Delta(\beta_\sigma \mid \mu)$ в этом случае тождественно равен нулю, и мы опять приходим к особенному случаю.

Для нахождения периодического решения в этом случае отбросим из системы (3.56) уравнение $\psi_k = 0$ и к оставшимся уравнениям

$$\psi_1 = 0, \ \psi_2 = 0, \ \ldots, \ \psi_{k-1} = 0$$

присоединим произвольно выбранное k-е уравнение, например уравнение $\beta_i = \text{const}$ (i — любое из чисел $1, 2, \ldots, k$) или уравнение $F = C$, где C — данная постоянная. Тогда для каждого (достаточно малого по модулю) значения μ мы будем иметь бесчисленное множество периодических решений с периодом ω. Но если рассматривать C как данную задачи, то вообще будем иметь только одно периодическое решение, соответствующее этой постоянной.

Аналогичные выводы получаются также для случаев, когда уравнения (3.52) имеют несколько интегралов типа (3.65).

3. До сих пор мы предполагали, что функции Z_s, входящие в уравнения (3.52), содержат явно время t.

Рассмотрим теперь случай, когда первоначальные уравнения не зависят от времени и имеют вид

$$\dot{z}_s = Z_s(z_\sigma \mid \mu) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.66}$$

причем все остальные предположения относительно правых частей уравнений (3.66) остаются прежними.

Этот случай имеет существенные особенности, резко отличающие его от случая систем, зависящих от времени.

В самом деле, для уравнений (3.52) любое периодическое решение (если оно существует) имеет вполне определенный период, равный периоду ω правых частей этих уравнений или кратный ему.

Наоборот, уравнения (3.66) могут иметь периодические решения любого периода T, который будет, вообще говоря, функцией параметра μ.

Кроме того, уравнения (3.66) не могут иметь изолированных периодических решений. Действительно, если

$$z_s = \varphi_s(t) \tag{3.67}$$

есть какое-нибудь решение системы (3.66), то функции

$$\bar{z}_s = \varphi_s(t + h) \tag{3.67'}$$

также будут представлять решение этой системы, какова бы ни была постоянная h *). Поэтому, если (3.67) есть периодическое решение, то (3.67′) также есть периодическое решение с тем же периодом.

Вследствие указанных особенностей рассматриваемый теперь случай требует специального исследования.

Положим в уравнениях (3.66) $\mu = 0$ и предположим, что полученные упрощенные уравнения

$$\dot{z}_s = Z_s(z_\sigma \mid 0) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.66'}$$

имеют периодическое решение с периодом T

$$\bar{z}_s = f_s(t), \tag{3.68}$$

так что имеем для любого значения t

$$f_s(t + T) = f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Будем искать периодическое решение системы (3.66), обращающееся в порождающее решение (3.68) при $\mu = 0$.

Обозначим через $T + \tau$ период искомого решения и через $f_s(t_0) + \beta_s$ соответствующие ему начальные значения функций z_s.

*) Действительно, делая подстановку $t' = t + h$, мы получим новые уравнения $z'_s = Z_s(z_\sigma \mid \mu)$, имеющие такой же вид, как и старые.

Используя опять формулы (3.55′), получим отклонения x_s искомого решения от порождающего периодического в виде рядов, расположенных по степеням β_s и μ, после чего само решение системы (3.66) представится в виде

$$z_s(t \mid \beta_\sigma \mid \mu) = f_s(t) + x_s(t \mid \beta_\sigma \mid \mu). \tag{3.69}$$

Теперь составляем условия периодичности, требуя, чтобы решение (3.69) имело период $T + \tau$, что даст следующие уравнения:

$$\psi_s(\tau \mid \beta_\sigma \mid \mu) = z_s(t_0 + T + \tau \mid \beta_\sigma \mid \mu) - z_s(t_0 \mid \beta_\sigma \mid \mu) = f_s(t_0 + T + \tau) - \\ - f_s(t_0) + x_s(t_0 + T + \tau \mid \beta_\sigma \mid \mu) - x_s(t_0 \mid \beta_\sigma \mid \mu) \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{3.70}$$

Так как все коэффициенты рядов (3.55′) и все $f_s(t)$ суть непрерывные, ограниченные функции времени, то значения этих величин для $t = t_0 + T + \tau$ можно разложить в ряды, расположенные по степеням τ, абсолютно сходящиеся по крайней мере для численно достаточно малых значений τ.

Поэтому все функции ψ_s будут голоморфными функциями величин τ, β_σ и μ, уничтожающимися, когда все эти величины равны нулю в силу заведомой периодичности порождающего решения (3.68).

Мы получили таким образом систему k уравнений, в которой величины β_s и τ рассматриваем как неизвестные, а параметр μ — как независимую переменную.

Следовательно, одну из неизвестных мы можем выбрать совершенно произвольно. Будем считать, что величине β_k, например, приписано какое-нибудь произвольно выбранное, но определенное значение β_k^* (для простоты можно взять $\beta_k^* = 0$). Тогда, если функциональный определитель

$$\Delta_k = \frac{D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{k-1},\ \psi_k)}{D(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{k-1},\ \tau)}$$

не равен нулю при $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = \tau = 0$, то, согласно теореме о неявных функциях, уравнения (3.70) разрешимы и определяют единственное голоморфное решение, в котором все величины $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$, τ представятся рядами, расположенными по степеням μ, абсолютно сходящимися по крайней мере при достаточно малых $|\mu|$.

Подставляя найденные значения β_s ($\beta_k = 0$) в ряды (3.55′), мы найдем затем по формулам (3.69) ряды, расположенные по степеням μ, определяющие искомое периодическое решение с периодом $T + \tau$, который также является рядом, расположенным по степеням μ.

Если определитель Δ_k обращается в нуль, можно произвольно выбрать какую-нибудь другую из постоянных β_i (просто полагая ее равной нулю) и затем рассуждать таким же образом, как и выше.

Таким образом мы придем к заключению, что система (3.66) будет иметь периодическое решение, голоморфное относительно μ и обращающееся в порождающее решение (3.68) при $\mu = 0$, если только не все определители k-го порядка, заключающиеся в матрице

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta_k} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial\beta_1} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial\beta_k} & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial\tau} \end{matrix} \right\|,$$

обращаются в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_k = \tau = 0$ (Δ_i — определитель, получающийся выбрасыванием i-й колонки написанной выше матрицы).

Отметим, что последний определитель, содержащийся в матрице, т. е. определитель Δ_{k+1}, заведомо равен нулю при одновременном равенстве нулю всех переменных, что непосредственно следует из того, что порождающее решение остается периодическим при замене t на $t+h$ и, следовательно, система уравнений (3.70) должна иметь при $\tau = \mu = 0$ бесчисленное множество решений, отличных от решения $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$.

Что же касается остальных определителей Δ_i матрицы ($i = 1, 2, \ldots, k$), то среди них, вообще говоря, заведомо будут отличные от нуля, и изложенный способ позволит почти всегда найти периодическое решение и его период.

Если же все определители Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) равны нулю, когда все β_s, τ, μ — нули, то мы имеем особенный случай, который может быть рассмотрен так же, как и в предыдущем разделе, и мы для сокращения этот анализ производить не будем.

Допустим теперь, что уравнения (3.66) имеют интеграл

$$F(z_\sigma \mid \mu) = \text{const}.$$

Тогда, так же как и выше, можно показать, что уравнения (3.70) не будут различными, и их можно заменить следующими:

$$\beta_k = 0, \quad F = C + \lambda\mu, \quad \psi_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, k-1),$$

где

$$C = F\left(\tilde{z}_\sigma^{(0)}, 0\right),$$

а λ — какая-нибудь постоянная.

Можно также заменить уравнения (3.70) следующими:

$$\beta_k=0, \quad \tau=0, \quad \psi_s=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1),$$

решение которых даст величины β_s $(s=1, 2, \ldots, k-1)$ как голоморфные функции μ, что будет соответствовать периодическому решению системы (3.66), обладающему тем же периодом T, что и порождающее решение.

Таким образом, получаем важный результат: вообще система (3.66) не имеет при $\mu \neq 0$ (но достаточно малом) периодического решения с периодом T; если же система (3.66) имеет интеграл, то при достаточно малом, но отличном от нуля μ можно найти единственное периодическое решение, имеющее в точности период T.

Заметим теперь, что порождающее решение, которое по условию имеет период T, можно также рассматривать как периодическое решение с периодом pT (p целое).

Посмотрим, можно ли найти периодические решения системы (3.66), период которых мало отличается от pT и которые превращаются в исходное, порождающее решение при $\mu=0$.

Для этого вместо условий периодичности (3.70) напишем следующие:

$$\tilde{\psi}(\beta_\sigma \mid \mu \mid \tilde{\tau}) = z_s(t_0+pT+\tilde{\tau} \mid \beta_\sigma \mid \mu) - z_s(t_0 \mid \beta_\sigma \mid \mu), \tag{3.70'}$$

с которыми можно, очевидно, рассуждать так же, как и выше.

Следовательно, если мы обозначим, подобно предыдущему, через $\tilde{\Delta}_i$ определитель, получающийся выбрасыванием столбца с номером i из матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial\beta_1} & \ldots & \dfrac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial\beta_k} & \dfrac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial\tilde{\tau}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\tilde{\psi}_k}{\partial\beta_1} & \ldots & \dfrac{\partial\tilde{\psi}_k}{\partial\beta_k} & \dfrac{\partial\tilde{\psi}_k}{\partial\tilde{\tau}} \end{matrix} \right\|,$$

то, вообще говоря, не все $\tilde{\Delta}_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ будут равны нулю, когда мы положим $\beta_s=\mu=\tilde{\tau}=0$.

Следовательно, вообще говоря, найдутся периодические решения системы (3.66) с периодом $pT+\tilde{\tau}$, которые не будут совпадать с решениями периода $T+\tau$, но которые также превращаются в порождающее решение при $\mu=0$.

4. Понятие периодического решения, как заметил Пуанкаре, можно несколько обобщить, что может оказаться полезным при рассмотрении вопроса о периодических решениях в задачах небесной механики.

Допустим, что правые части уравнений (3.66), т. е. функции $Z_s(z_\sigma|\mu)$, суть периодические функции некоторых из аргументов z_s с одним и тем же периодом ω.

Пусть таким свойством обладают функции Z_s относительно q первых из величин z_s, так что Z_s не изменятся, когда мы заменим какую-либо из величин z_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ на $z_i + \omega$.

Допустим теперь, что некоторое решение $\varphi_s(t)$ системы (3.66) обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned} &\varphi_i(t_0+T)=\varphi_i(t_0)+m_i\omega \qquad &(i=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\ &\varphi_j(t_0+T)=\varphi_j(t_0) \qquad &(j=q+1,\ \ldots,\ k), \end{aligned}$$

где m_i — целые числа.

Тогда в момент t_0+T первые q переменных будут отличаться от своих начальных значений на величины, кратные ω, а остальные переменные вовсе не изменятся. Так как при этом величины Z_s не изменятся, то в момент t_0+T система, состояние которой определяется уравнениями (3.66), будет находиться в тех же условиях, что и в начальный момент t_0. Следовательно, мы будем иметь для любого значения t:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i(t+T)=\varphi_i(t)+m_i\omega \qquad &(i=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\ &\varphi_j(t+T)=\varphi_j(t) \qquad &(j=q+1,\ \ldots,\ k). \end{aligned}\right\} \tag{3.71}$$

Решение $\varphi_s(t)$ системы (3.66), удовлетворяющее условиям (3.71), условимся называть, следуя Пуанкаре, *периодическим решением второго рода* с периодом T.

Особенно важным случаем задачи, в которой существуют периодические решения второго рода, является тот, когда предложенные дифференциальные уравнения имеют каноническую форму с функцией Гамильтона, обладающей некоторыми характерными свойствами.

Пусть дана каноническая система

$$\dot{x}_s=\frac{\partial F}{\partial y_s}, \quad \dot{y}_s=-\frac{\partial F}{\partial x_s} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.72}$$

где функция Гамильтона не зависит от времени и для всех вещественных значений y_s является голоморфной функцией параметра μ, т. е. представляется рядом

$$F=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k F_k, \tag{3.72'}$$

абсолютно сходящимся при достаточно малых значениях $|\mu|$.

Предположим, кроме того, что F_0 зависит только от x_s, а все F_k $(k > 1)$ — периодические функции каждой из переменных y_s с одним и тем же периодом ω.

Уравнения (3.72) при $\mu = 0$ легко интегрируются. Действительно, полагая $\mu = 0$, получаем упрощенную систему

$$\dot{\tilde{x}}_s = 0, \quad \dot{\tilde{y}}_s = -\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{x}_s}, \tag{3.73}$$

из которой выводим немедленно

$$\tilde{x}_s = \tilde{x}_s^{(0)}, \quad \tilde{y}_s = n_s(t - t_0) + \tilde{y}_s^{(0)}, \tag{3.73'}$$

где $\tilde{x}_s^{(0)}$ и $\tilde{y}_s^{(0)}$ — произвольные постоянные, а n_s — постоянные, зависящие от $\tilde{x}_s^{(0)}$ и определяемые формулами

$$n_s = -\left[\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{x}_s}\right]_{\tilde{x}_s = \tilde{x}_s^{(0)}} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.73''}$$

Решение (3.73′) упрощенной системы (3.73) будем рассматривать как «порождающее» решение. Если притом существует такая постоянная T, что мы имеем

$$n_s T = m_s \omega, \tag{3.74}$$

где все m_s — целые числа, то условия (3.71) будут выполнены и порождающее решение (3.73′) есть периодическое второго рода с периодом T.

Предполагая, что условия (3.74) выполнены, посмотрим, существуют ли подобные периодические решения, с тем же периодом T, также и при $\mu \neq 0$, но достаточно малом численно.

Рассмотрим для этого некоторое решение первоначальной системы (3.72) с начальными условиями $x_s^{(0)}$, $y_s^{(0)}$, мало отличающимися от начальных условий порождающего решения.

Пусть для $t = t_0$

$$x_s^{(0)} = \tilde{x}_s^{(0)} + \beta_s, \qquad y_s^{(0)} = \tilde{y}_s^{(0)} + \gamma_s. \tag{3.75}$$

Функции x_s и y_s, удовлетворяющие уравнениям (3.72) и принимающие при $t = t_0$ значения (3.75), согласно общим нашим предположениям о свойствах рассматриваемых дифференциальных уравнений (которые здесь предполагаются выполненными), будут голоморфными функциями величин μ, β_s и γ_s, представляемыми рядами, расположенными по степеням этих величин, коэффициенты которых — непрерывные функции времени.

Потребуем теперь, чтобы эти функции удовлетворяли условиям типа (3.71) с периодом T:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_s &= x_s(t_0 + T) - x_s(t_0) = 0, \\ \psi_s &= y_s(t_0 + T) - y_s(t_0) - n_s T = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.75'}$$

т. е. чтобы решение системы (3.72) также было периодическим второго рода.

Условия периодичности (3.75′) представляют собой систему $2n$ уравнений с таким же числом неизвестных функций β_s, γ_s, причем μ рассматривается как независимая переменная. Однако уравнения (3.75) не являются независимыми. Действительно, так как функция Гамильтона не зависит от времени, то уравнения (3.72) имеют интеграл

$$F(x_\sigma \,|\, y_\sigma \,|\, \mu) = \mathrm{const}, \tag{3.76}$$

а так как F — периодическая функция от y_s с периодом ω, то в силу условий (3.75′) мы имеем

$$F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma \,|\, \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma \,|\, \mu) = F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \varphi_\sigma \,|\, \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma + n_\sigma T + \psi_\sigma \,|\, \mu) =$$
$$= F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \varphi_\sigma \,|\, \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma + \psi_\sigma \,|\, \mu),$$

откуда получаем соотношение

$$F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \varphi_\sigma \,|\, \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma + \psi_\sigma \,|\, \mu) - F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma \,|\, \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma \,|\, \mu) = 0.$$

Следовательно, одну из неизвестных можно выбрать произвольно, после чего задача приведется к нахождению $2n - 1$ неизвестных из такого же числа независимых уравнений.

Положим, например, $\gamma_1 = 0$ и, кроме того, $\tilde{y}_1^{(0)} = 0$, что не нарушает общности, так как для этого достаточно взять начальную эпоху таким образом, чтобы y_1 было равно нулю для $t = t_0$. Теперь нужно показать, что можно определить β_s и γ_s как голоморфные функции от μ, уничтожающиеся при $\mu = 0$.

Заметим, что при $\mu = 0$ мы имеем тождественно $\varphi_s = 0$, откуда следует, что разложения функций φ_s содержат μ множителем. Сокращая этот множитель, мы напишем подлежащие разрешению уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\varphi_s &= 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \psi_s &= 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3.77}$$

Теперь, чтобы доказать существование интересующего нас периодического решения, нужно убедиться, что функциональный определитель

$$\Delta = \frac{D\left(\frac{1}{\mu}\varphi_\sigma \,|\, \psi_j\right)}{D(\beta_\sigma \,|\, \gamma_j)} \tag{3.77′}$$

не равен нулю при одновременном равенстве нулю всех переменных.

Но для $\mu = 0$ имеем, как легко видеть,

$$\psi_s = -T\frac{\partial}{\partial \beta_s} F_0(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда следует, что якобиан функций ψ_s по величинам β_s определится равенством $(\mu = \beta_s = 0)$

$$\Delta_1 = (-T)^n \left\| \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_s \, \partial x_\sigma} \right\| \quad \left(x_s = \tilde{x}_s^{(0)}\right); \tag{3.78}$$

Δ_1 есть определитель Гессе от функции F_0 по отношению к величинам x_s.

Выразим теперь $\frac{1}{\mu}\varphi_s$ в функции величин γ_s, предполагая одновременно $\mu = 0$ и $\beta_s = 0$.

Но мы имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_s - \tilde{x}_s^{(0)}}{\mu}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial y_s} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial y_s} + \ldots,$$

откуда

$$\frac{1}{\mu}\varphi_s = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial F_1}{\partial y_s}\, dt + \mu \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial F_2}{\partial y_s}\, dt + \ldots,$$

и для $\mu = 0$ получаем

$$\frac{1}{\mu}\varphi_s = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial F_1}{\partial y_s}\, dt. \tag{3.79}$$

Так как мы положили $\mu = 0$, $\beta_s = 0$, то, имея в виду, что мы сделали $\gamma_1 = \tilde{y}_1^{(0)} = 0$, мы должны в правой части последнего уравнения заменить x_s, y_s соответственно на $\tilde{x}_s^{(0)}$, $n_1(t - t_0)$, $n_s(t - t_0) + \tilde{y}_s^{(0)} + \gamma_s$.

Тогда $\frac{\partial F_1}{\partial y_s}$ сделается периодической функцией от t. Но мы можем написать

$$F_1 = \sum A \sin\left[\sum_{\sigma=1}^{n} m_\sigma y_\sigma + B\right], \tag{3.80}$$

где m_σ — целые числа, а величины A и B — функции от x_s и не зависят от y_s.

Полагая для сокращения

$$\Omega = (t - t_0)\sum_{\sigma=1}^{n} m_\sigma n_\sigma + B + \sum_{\sigma=2}^{n} m_\sigma\left(\tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_s\right),$$

мы имеем

$$F_1 = \sum A \sin\Omega,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_s} = \sum A m_s \cos\Omega = \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{y}_s^{(0)}}.$$

Очевидно, что F_1 при этих условиях также есть периодическая функция от t с периодом T.

Обозначим через $[F_1]$ среднее значение периодической функции F_1, так что

$$[F_1]=\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} F_1\,dt. \tag{3.81}$$

Теперь уравнения (3.79) примут вид

$$\frac{1}{\mu}\varphi_s=T\frac{\partial [F_1]}{\partial \tilde{y}_s^{(0)}}.$$

Отсюда следует, что всегда можно выбрать $\tilde{y}_s^{(0)}$ $(s=2, \ldots, n)$ так, чтобы уравнения $\frac{1}{\mu}\varphi_s=0$ $(s=1, 2, \ldots, n-1)$ удовлетворялись для $\gamma_s=0$ $(s=2, 3, \ldots, n)$.

Действительно, функция $[F_1]$ есть ограниченная периодическая функция от $\tilde{y}_s^{(0)}$ и, следовательно, имеет максимум и минимум, для которых необходимо

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial \tilde{y}_s^{(0)}}=0 \qquad (s=2, 3, \ldots, n),$$

а, следовательно, и $\frac{1}{\mu}\varphi_s=0$.

Возвращаясь теперь к определителю (3.77'), замечаем, что при $\mu=0$ функции ψ_s зависят только от β_s, а следовательно, этот определитель равен произведению двух других, а именно:

$$\frac{D(\psi_j)}{D(\beta_\sigma)}, \quad \frac{D\left(\frac{1}{\mu}\varphi_\sigma\right)}{D(\gamma_i)}=\Delta_2.$$

Но первый равен определителю Δ_1, а второй есть определитель Гессе от $[F_1]$ по отношению к $\tilde{y}_s^{(0)}$.

Таким образом, *если ни один из определителей Δ_1 и Δ_2 не равен нулю, то определитель Δ не обращается в нуль при одновременном равенстве нулю всех переменных и уравнения* (3.77) *имеют единственное голоморфное решение относительно β_s и γ_j $(j=2, 3, \ldots, n)$.*

Поэтому при высказанном условии уравнения (3.72) заведомо будут иметь периодическое решение второго рода с периодом T.

Примечание. Можно также поставить задачу об отыскании периодического решения системы (3.72) с периодом, немного отличающимся от T.

Эту задачу мы, для краткости, рассматривать не будем.

Часть вторая

ОГРАНИЧЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Основная задача небесной механики заключается, как известно, в изучении движений всевозможных небесных тел, как естественных, так и искусственных, находящихся под действием разнообразных космических сил, главными из которых являются силы взаимных притяжений.

Известно также, что эти задачи оказываются, вообще говоря, чрезвычайно сложными и в большинстве случаев неразрешимы с математической точки зрения.

Поэтому обычно стараются по возможности упростить поставленную астрономическую задачу настолько, чтобы исследование движения интересующего нас небесного тела сделалось математически доступным и позволило получить желаемые результаты.

Главные затруднения представляют задачи о совместном определении движений нескольких небесных тел, взаимно влияющих друг на друга. Действительно, в этих случаях астрономическая задача приводится к рассмотрению системы дифференциальных уравнений второго порядка, причем общий порядок всей системы оказывается весьма высоким.

Однако в ряде случаев оказывается возможным с известной степенью приближения рассматривать задачу о движении только одного тела, считая, что движения остальных так или иначе могут полагаться известными.

Такого рода задачи, по почину Пуанкаре, будем называть «ограниченными».

Классическим примером ограниченной задачи является ограниченная задача трех тел (материальных точек), возникшая первоначально при изучении движений малых планет или комет. Так как массы этих небесных тел весьма малы по сравнению с массами Солнца и больших планет, то влияние астероида или кометы на остальные тела Солнечной системы совершенно ничтожно и им можно полностью пренебречь. Таким образом, мы приходим к задаче о движении материальной точки под действием притяжений двух других материальных точек — Солнца и Юпитера, причем можно считать, что Юпитер движется вокруг Солнца по законам Кеплера.

Подобным же образом можно рассматривать и более сложные ограниченные задачи, к которым можно отнести также задачу о движении спутника (естественного или искусственного) в поле притяжения центральной планеты, рассматриваемой как тело.

Вообще, если рассматривается система, состоящая из любого числа тел, то под ограниченной задачей мы будем понимать задачу о движении одного-единственного тела, предполагая, что движения всех остальных известны и что рассматриваемое тело не оказывает на все остальные никакого влияния.

Часть вторая нашей книги и посвящается рассмотрению некоторых важнейших ограниченных задач такого рода.

Глава IV

ЗАДАЧА НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

В этой главе рассматривается простейшая ограниченная задача небесной механики — задача о движении материальной точки, притягиваемой (или отталкиваемой) несколькими неподвижными точечными центрами. Сама материальная точка не оказывает на эти центры никакого действия и называется, по этой причине, *пассивно действующей*. Каждый из неподвижных центров обладает некоторой конечной массой, но не оказывает никакого действия на все другие неподвижные точечные массы. Сила, с которой каждый неподвижный точечный центр действует на свободную, пассивно действующую материальную точку, предполагается направленной по прямой, соединяющей обе точки. По величине эта сила предполагается пропорциональной произведению масс этих точек и некоторой функции от расстояния между ними. В более общем случае эта сила может также зависеть от первых двух производных по времени от упомянутого расстояния.

Если число неподвижных центров равно двум, а закон силы есть ньютоновский закон притяжения, обратно пропорционального квадрату взаимного расстояния, то мы имеем классическую задачу двух неподвижных центров. Эта задача, не нашедшая применения в классической небесной механике, имеет в настоящее время большое и важное значение для нового раздела этой науки — теории движения искусственных спутников планет Солнечной системы.

§ 1. Задача многих неподвижных центров

1. Поставим сначала задачу многих неподвижных центров в наиболее общем виде. Пусть в некоторой неизменной системе декартовых координат имеется некоторое количество n $(n \geqslant 1)$ активно действующих, неподвижных центров M_i, обладающих массами m_i, координаты которых обозначим буквами a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть, далее, M — свободная материальная точка с массой m и координатами x, y, z, которая является пассивно действующей. Таким образом, точка M не оказывает никакого влияния на неподвижные центры, но сама находится под действием сил, исходящих от этих центров.

Допустим, что неподвижный центр M_i действует на точку M с силой, направленной по прямой, соединяющей обе точки и пропорциональной произведению их масс и некоторой функции F_i, определяющей закон действия силы.

Таким образом, масса m находится под действием n сил, равных по величине $f_i m_i m F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где множители пропорциональности f_i — вещественные постоянные или, вообще, заданные функции времени, которые могут иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Закон силы F_i есть заданная функция, вообще, времени, расстояния r_i и его производных по времени $\dot{r}_i$ и $\ddot{r}_i$. Итак,

$$F_i = F_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i,\ \ddot{r}_i). \tag{4.1}$$

Уравнения движения свободной точки M, находящейся под действием n неподвижных центров, напишутся, очевидно, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{a_i - x}{r_i}, \\ \ddot{y} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{b_i - y}{r_i}, \\ \ddot{z} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{c_i - z}{r_i}, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

где

$$r_i = \sqrt{(a_i - x)^2 + (b_i - y)^2 + (c_i - z)^2} \tag{4.3}$$

и, соответственно,

$$\dot{r}_i = -\frac{(a_i - x)\,\dot{x} + (b_i - y)\,\dot{y} + (c_i - z)\,\dot{z}}{r_i}, \tag{4.3'}$$

$$\ddot{r}_i = \frac{-(a_i - x)\,\ddot{x} - (b_i - y)\,\ddot{y} - (c_i - z)\,\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \dot{r}_i^2}{r_i}. \tag{4.3''}$$

Таким образом, в самом общем случае правые части уравнений (4.2) зависят не только от координат пассивно действующей точки x, y, z, но, через посредство функций F_i, также от производных по времени координат $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, а также и от времени t.

Поэтому уравнения (4.2) являются весьма сложными и их интегрирование вообще возможно только при помощи бесконечных рядов того или иного вида. Это обстоятельство является, впрочем, весьма характерным для задач небесной механики, которые допускают интегрирование в конечном виде только в некоторых простейших случаях, например, в задаче о движении двух материальных точек, взаимно притягивающихся (или отталкивающихся) по закону Ньютона.

Уравнения (4.2) чрезвычайно упрощаются, если множители пропорциональности не зависят от времени, а функции F_i, определяющие законы действующих сил, зависят только от расстояний, т. е. когда

$$f_i = \text{const}, \quad F_i = F_i(r_i), \tag{4.4}$$

или когда к тому же еще

$$f_i = f \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.4'}$$

Еще более простым случаем является тот, когда каждый из неподвижных центров действует на точку M по одному и тому же закону, что будет в случае, когда

$$f_i = f, \quad F_i = F(r_i). \tag{4.4''}$$

Из случаев последнего рода полезно особо отметить случай степенного закона, когда

$$F_i = r_i^K, \tag{4.4'''}$$

где K — какое-либо вещественное число, положительное или отрицательное (не равное нулю!). В частности, при $K = 1$ имеем закон взаимодействия, пропорционального расстоянию:

$$F_i = r_i.$$

Этот закон мы будем называть *законом Гука*. Если показатель степени K — число отрицательное, то удобнее положить $K = -N$, и тогда мы будем иметь закон действия, обратно пропорционального некоторой степени расстояния:

$$F_i = \frac{1}{r_i^N},$$

который при $N = 2$ есть знакомый нам закон Ньютона.

Из более сложных случаев отметим рассмотренный в т. IV известного трактата Тиссерана закон Вебера

$$F_i(t;\, r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i) = \frac{1}{r_i^2}\left(1 - \frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2} + \frac{2r_i\ddot{r}_i}{\sigma_i^2}\right), \tag{4.5}$$

где вообще для различных неподвижных центров величины f_i и σ_i могут иметь различные значения и, к тому же, могут зависеть от времени. Более простой случай имеем, когда

$$f_i = f = \text{const}, \quad \sigma_i = \sigma = \text{const}.$$

Заметим, что σ представляет собой *скорость распространения действия* (притяжения или отталкивания) и что при $\sigma = \infty$ закон Вебера совпадает с законом Ньютона.

У читателя может возникнуть естественный вопрос: *зачем рассматривать другие законы, отличные от классического закона Ньютона, с помощью которого как будто объясняются и законы движений планет в Солнечной системе и различные явления в звездных системах*?

На это можно ответить следующим образом: закон Ньютона, как известно, выведен из законов Кеплера, которые в свою очередь получены из многочисленных наблюдений, выполненных Тихо Браге. Ясно, что законы Кеплера являются поэтому только приближенными и что действительные движения планет и их спутников в Солнечной системе этим законам не подчиняются или, во всяком случае, плохо подчиняются! Отсюда следует, что закон Ньютона является также приближенным законом, весьма удобным для практических приложений в небесной механике, но представляющим собой только модель истинного, неизвестного еще нам закона, царствующего во Вселенной.

К тому же уже давно было замечено, что расчеты движений планет, основанные на законе Ньютона, часто оказываются расходящимися с результатами весьма тщательных наблюдений. Вследствие этого неоднократно предлагалось заменить закон Ньютона каким-либо другим законом типа (4.4‴) или (4.5) либо еще каким-нибудь другим. Эти попытки оказывались обычно неудачными или неудобными для приложений, и к тому же предлагавшиеся новые законы также являлись всегда приближенными моделями и не вскрывали истинных свойств закономерностей (если таковые на самом деле существуют!) во Вселенной.

Нужно заметить еще, что хотя результаты, полученные на основании закона Ньютона, все же оказываются более или менее удовлетворительными для практики в пределах Солнечной системы, но считать по этой причине закон Ньютона всеобщим законом всемирного тяготения, как это часто и охотно делается, нет никаких оснований.

В самом деле, мы не имеем еще возможностей следить за движениями далеких звезд и звездных систем достаточно продолжительное время для того, чтобы было возможно сравнивать результаты наблюдений с результатами вычислений, полученными на основании какого-либо модельного закона, хотя бы закона Ньютона.

Поэтому истинные законы движений в отдаленных областях Вселенной нам остаются совершенно неизвестными, вследствие чего рассмотрение наиболее общих форм законов и математическое исследование получающихся отсюда уравнений и свойств движений является вполне оправданным и целесообразным, что всегда признавали многие выдающиеся математики и астрономы.

Вследствие этих соображений в следующих главах книги мы часто будем обращаться к законам более общего вида, чем закон Ньютона, не отбрасывая при этом из рассмотрения и те выводы, которые следуют из закона Ньютона.

Может возникнуть и второй вопрос: почему в этой книге не излагаются и не используются результаты, полученные на основе теории относительности? На это мы ответим так: теория относительности представляет нам также модель закономерностей Вселенной, но гораздо более сложную математически, чем всякая другая. Использование теории относительности в небесной механике может быть произведено только при помощи ряда упрощений и приближений, а такая методика ничем не отличается от классической. Кроме того, мы имеем прекрасную книгу В. А. Брумберга «Релятивистская небесная механика» («Наука», 1972 г.), и нет надобности повторять то, что в ней изложено.

2. Вернемся теперь к уравнениям (4.2) и посмотрим, в каких случаях эти уравнения могут допускать какие-либо интегралы или даже быть полностью проинтегрированы в квадратурах.

Прежде всего отметим один любопытный случай, в котором уравнения (4.2) интегрируются до конца и притом в элементарных функциях. Это случай, когда каждый из неподвижных центров действует на пассивную точку M по закону Гука.

Действительно, при $F_i = r_i$ уравнения (4.2) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \varkappa^2 \cdot x &= A,\\ \ddot{y} + \varkappa^2 \cdot y &= B,\\ \ddot{z} + \varkappa^2 \cdot z &= C, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

где

$$\left.\begin{gathered} \varkappa^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i,\\ A = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i a_i, \quad B = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i c_i. \end{gathered}\right\} \tag{4.6'}$$

Уравнения (4.6) составляют три независимых между собой уравнения, каждое из которых есть линейное уравнение второго порядка. Эти уравнения легко интегрируются, если все f_i суть величины постоянные (положительные или отрицательные).

Действительно, если все f_i постоянные, то решение уравнений (4.6) дается следующими формулами ($\varkappa^2 > 0$):

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(x_0 - \frac{A}{\varkappa^2}\right)\cos\varkappa t + \frac{\dot{x}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t + \frac{A}{\varkappa^2},\\ y &= \left(y_0 - \frac{B}{\varkappa^2}\right)\cos\varkappa t + \frac{\dot{y}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t + \frac{B}{\varkappa^2},\\ z &= \left(z_0 - \frac{C}{\varkappa^2}\right)\cos\varkappa t + \frac{\dot{z}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t + \frac{C}{\varkappa^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

и для $\varkappa^2 = -\lambda^2$ ($\lambda > 0$), $e = 2{,}7182\ldots$,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t} - \frac{A}{\lambda^2},\\ y &= \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{\dot{y}_0}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{\dot{y}_0}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t} - \frac{B}{\lambda^2},\\ z &= \frac{1}{2}\left(z_0 + \frac{\dot{z}_0}{\lambda} + \frac{C}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\left(z_0 - \frac{\dot{z}_0}{\lambda} + \frac{C}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t} - \frac{C}{\lambda^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.7'}$$

где x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ — начальные значения (для $t = 0$) координат и составляющих скорости точки M.

Заметим еще, что при $f_i = f$, т. е. когда все неподвижные центры действуют на точку M по одному и тому же закону, мы имеем

$$\varkappa^2 = -\lambda^2 = f\bar{m}, \quad A = f\bar{m}\bar{a}, \quad B = f\bar{m}\bar{b}, \quad C = f\bar{m}\bar{c},$$

где $\bar{m}$ — масса системы всех неподвижных центров и $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — координаты их центра масс.

Так как выбор неизменной системы координат совершенно произволен, то за начало координат можно принять центр масс неподвижных центров. Тогда в последнем случае (т. е. когда все f_i одинаковы) будем иметь

$$A = B = C = 0,$$

и формулы (4.7) и (4.7′) напишутся следующим образом:

$$x = x_0\cos\varkappa t + \frac{\dot{x}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t,$$

$$y = y_0\cos\varkappa t + \frac{\dot{y}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t,$$

$$z = z_0\cos\varkappa t + \frac{\dot{z}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t,$$

$$x = x_0\,\mathrm{ch}\,\lambda t + \frac{\dot{x}_0}{\varkappa}\,\mathrm{sh}\,\lambda t,$$

$$y = y_0\,\mathrm{ch}\,\lambda t + \frac{\dot{y}_0}{\varkappa}\,\mathrm{sh}\,\lambda t,$$

$$z = z_0\,\mathrm{ch}\,\lambda t + \frac{\dot{z}_0}{\varkappa}\,\mathrm{sh}\,\lambda t.$$

Из этих формул (впрочем, также и из (4.7), (4.7′)) можно извлечь все обстоятельства движения. Так, из (4.7) следует, что движение точки M происходит периодически в конечной области пространства и траектория есть линия пересечения двух эллиптических цилиндрических поверхностей. Наоборот, из (4.7′) следует, что траектория движения есть бесконечная пространственная кривая, являющаяся линией пересечения двух гиперболических цилиндров.

Уравнения упомянутых цилиндров получатся, очевидно, в результате исключения t из двух каких-либо пар уравнений (4.7) и (4.7′). Если в начальный момент $t=0$ точка M находится в центре масс и имеет отличную от нуля начальную скорость или если точка M в начальный момент имеет нулевую начальную скорость, то траектория движения есть прямая линия. При этом начальные значения (начальные составляющие скорости, или начальные координаты) всегда можно выбрать так, чтобы точка M достигла в конечное время любой из точек M_i и продолжала двигаться по своей прямолинейной траектории.

Если некоторые или все из величин f_i являются функциями времени, то уравнения (4.6), за исключением редких случаев, оказываются неинтегрируемыми в конечном виде и свойства движения в таких случаях можно обнаружить только методами качественного анализа. Разумеется, при этом свойства функций f_i должны быть известны. Например, если

$$\bar{a}=\bar{b}=\bar{c}=0, \quad f_i=f(t)$$

и $f(t)$, а следовательно, и $\varkappa^2$ есть периодические функции времени, то к каждому из уравнений (4.6) возможно применить результаты раздела 4 § 4 главы II.

Поэтому если $f(t)$ есть функция времени, принимающая только неположительные значения, то каждое движение точки M, близкое сколь угодно по начальным данным к положению равновесия ($x_0=y_0=z_0=\dot{x}_0=\dot{y}_0=\dot{z}_0=0$), будет покидать область начала координат и способно удаляться от него сколь угодно далеко.

Если же функция $f(t)$ может принимать только неотрицательные значения и при этом удовлетворяет условию

$$\omega\int\limits_0^\omega f(t)\,dt\leqslant 4,$$

где ω — период функции $f(t)$, то по второй теореме Ляпунова раздела 5 § 4 главы II, заключаем, что движение точки M, близкое по начальным данным к положению равновесия, будет сколь угодно долго оставаться вблизи этого положения.

В других случаях исследование движения делается гораздо более затруднительным и мы поэтому ограничимся только случаями уже рассмотренными.

3. Рассмотрим теперь случаи, когда уравнения (4.2), которые вообще не могут быть проинтегрированы полностью, могут допускать некоторые первые интегралы, аналогичные классическим.

Допустим прежде всего, что все неподвижные центры M_i лежат на одной прямой, которую всегда можно взять за одну из осей неизменной системы координат.

Пусть, например, все точки M_i лежат на оси z. Тогда $a_i = b_i = 0$. Тогда, каковы бы ни были функции F_i и величины f_i, мы имеем из уравнений (4.2)

$$y\ddot{x} - x\ddot{y} = 0,$$

откуда получаем первый интеграл

$$y\dot{x} - x\dot{y} = c, \tag{4.8}$$

где c — произвольная постоянная. Этот интеграл является интегралом площадей в плоскости (xOy), и если мы введем в этой плоскости вместо x и y полярные координаты ρ и φ обычными формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{4.9}$$

то интеграл (4.8) напишется в виде

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{4.8$'$}$$

и будет показывать, что проекция радиуса-вектора r точки M на плоскость (xOy) описывает площадь пропорционально времени.

Якоби, который рассматривал задачу неподвижных центров в своих знаменитых лекциях по динамике, замечает, что интеграл площадей (4.8) будет существовать и в том случае, когда к действиям неподвижных центров присоединится постоянная сила, параллельная оси z. В самом деле, в этом случае (если считать, как и выше, что все точки M_i лежат на оси z) уравнения (4.2) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} &= -x\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \frac{F_i}{r_i},\\
\ddot{y} &= -y\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \frac{F_i}{r_i},\\
\ddot{z} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \frac{c_i - z}{r_i} + F,
\end{aligned}\right\} \tag{4.2$'$}$$

и существование интеграла (4.8) очевидно.

Заметим, что этот результат остается справедливым, не только в случае $F = \text{const}$, но и тогда, когда величина F есть какая угодно функция от t, z, $\dot{z}$ и $\ddot{z}$.

Предположим теперь, что неподвижные центры расположены на оси z симметрично относительно начала координат, так что число точек M_i, лежащих на положительной части оси, равно числу точек, лежащих на отрицательной части, а одна точка находится в начале координат (если число точек нечетное).

Положим тогда $n = 2\nu$ (или $n = 2\nu + 1$) и напишем уравнения (4.2′) в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -x \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \\ \ddot{y} &= -y \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \\ \ddot{z} &= \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{c_j - z}{r_j} F_j + F. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2'')$$

Неподвижные центры, лежащие на оси z, располагаются теперь в порядке снизу вверх и, таким образом,

$$M_{-\nu},\ M_{-\nu+1},\ \ldots,\ M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_\nu$$

(если n четное, полагаем $m_0 = 0$).

Пусть теперь выполняются условия

$$f_{-j} = f_j, \quad m_{-j} = m_j, \quad F_{-j} = F_j, \quad F = 0. \qquad (4.10)$$

Тогда, как легко видеть, последнее из уравнений (4.2″) удовлетворяется при $z = 0$, а поэтому, если в начальный момент точка M находится в плоскости $z = 0$ и вектор ее начальной скорости также лежит в этой плоскости, то точка M всегда будет оставаться в плоскости $z = 0$ и траекторией ее движения будет плоская кривая.

Из уравнений (4.2′) видно, что плоское движение возможно также и в координатных плоскостях $x = 0$ и $y = 0$, а также, конечно, и на линии их пересечения, т. е. по оси Oz, причем в этих случаях условия (4.10) могут и не соблюдаться.

Останавливаясь на случае движения в плоскости $z = 0$, заметим, что условия (4.10) заведомо выполняются при симметрично равных массах, когда

$$f_j = f_{-j} = f, \quad F_j = F_{-j} = F.$$

Уравнения плоского движения (в плоскости $z=0$) составляют систему двух уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -x \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \\ \ddot{y} &= -y \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

обладающую интегралом площадей (4.8).

В уравнениях (4.11) расстояния r_j и их производные выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_j &= \sqrt{\rho^2 + c_j^2}, \\ \dot{r}_j &= \frac{\rho\dot{\rho}}{r_j}, \\ \ddot{r}_j &= \frac{\rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 - \dot{r}_j^2}{r_j}. \end{aligned}\right\} \tag{4.11'}$$

Если теперь в уравнениях (4.11) перейти от прямоугольных координат к полярным при помощи формул (4.9), то, имея в виду интеграл площадей (4.8′), мы приведем нашу задачу к интегрированию одного уравнения второго порядка относительно радиуса-вектора ρ:

$$\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = -\sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j F_j (t;\ r_j,\ \dot{r}_j,\ \ddot{r}_j), \tag{4.12}$$

и если это уравнение проинтегрировано, то полярный угол φ получится из (4.8′) квадратурой:

$$\varphi - \varphi_0 = c \int_0^t \frac{dt}{\rho^2}. \tag{4.12'}$$

Интегрирование уравнения (4.12), конечно, представляет еще весьма сложную математическую задачу, хотя несравненно более простую, чем интегрирование системы (4.2) или даже системы (4.11).

Однако, если величины f_j — постоянные и функции F_j не содержат явно времени, то, если выполняется условие

$$\sum_{j=-\nu}^{\nu} f_j m_j F_j (\bar{c}_j,\ 0,\ 0) > 0,$$

где $\bar{c}_j$ — положительные постоянные, уравнение (4.12) всегда имеет частное решение

$$\rho = a = \text{const},$$

причем

$$\bar{c}_j^2 = a^2 + c_j^2.$$

Таким образом, в этом случае под совместным действием n неподвижных центров, лежащих на оси z, точка M движется в плоскости (xOy) по окружности, радиуса a с постоянной угловой скоростью c/a^2.

4. Исследуем теперь случаи, в которых задача неподвижных центров допускает интеграл, аналогичный интегралу живой силы.

Помножим уравнения (4.2), как это обычно делается, на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и сложим. Тогда, имея в виду формулы (4.3′), мы получим

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -2\sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{dr_i}{dt}. \tag{4.13}$$

Чтобы из (4.13) можно было вывести интеграл живой силы, необходимо, очевидно, чтобы правая часть равенства (4.13) оказалась точной производной по времени.

Это заведомо будет в случае, когда $f_i = \text{const}$, и каждая из функций F_i зависит только от соответствующего расстояния r_i. Тогда интегрирование дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x, y, z) + 2h, \tag{4.13′}$$

где

$$U(x, y, z) = -\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \int F_i(r_i)\, dr_i \tag{4.14}$$

есть силовая функция системы неподвижных центров и h есть произвольная постоянная.

Например, пусть каждая из F_i есть степенна́я функция, т. е.

$$F_i = r_i^{K_i}.$$

Тогда

$$\int F_i\, dr_i = \frac{1}{K_i + 1} r_i^{K_i+1},$$

и силовая функция представится формулой

$$U(x, y, z) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i m_i}{K_i + 1} r_i^{K_i+1} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i m_i}{K_i + 1} [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2]^{\frac{1}{2}(K_i+1)}.$$

В частности, если каждый из неподвижных центров притягивает точку M по закону Ньютона, то $K_i = -2$ и силовая функция имеет следующее выражение:

$$U = f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i} = f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}}.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Допустим, что для каждой из функций F_i найдется такая функция Φ_i, что выполняется равенство ($f_i = \text{const}$)

$$\dot{r}_i F_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i,\ \ddot{r}_i) = \frac{d}{dt}\Phi_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i). \tag{4.15}$$

Тогда равенство (4.13) может быть проинтегрировано, и в результате мы получим обобщенный интеграл живой силы в виде

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = -\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \Phi_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i) + h. \tag{4.16}$$

Пример такого рода дает нам закон Вебера, определяемый формулой (4.5) в случае, когда $f_i = \text{const}$ и $\sigma_i = \text{const}$.

В самом деле, легко непосредственно проверить, что в этом случае функция Φ_i, соответствующая закону Вебера (4.5), будет

$$\Phi_i(r_i,\ \dot{r}_i) = \frac{1}{r_i}\left[-1+\frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2}\right],$$

так что из (4.16) получим в этом случае

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i m_i}{r_i}\left[1-\frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2}\right]+h, \tag{4.16'}$$

где r_i и $\dot{r}_i$ по-прежнему определяются формулами (4.3) и (4.3').

Обозначая, как обычно, живую силу через T и вводя обобщенную силовую функцию $U(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$ посредством формулы

$$U(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i m_i}{r_i}\left[1-\frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i m_i}{r_i}\left[1-\frac{[(a_i-x)\dot{x}+(b_i-y)\dot{y}+(c_i-z)\dot{z}]^2}{\sigma_i^2\left[(a_i-x)^2+(b_i-y)^2+(c_i-z)^2\right]^2}\right],$$

напишем (4.16') в виде

$$T = U + h.$$

Возвращаясь к общему случаю существования интеграла живой силы, посмотрим теперь, каким условиям должна удовлетворять функция F_i, чтобы было возможно равенство (4.15).

Написав равенство (4.15) в раскрытом виде,

$$\dot{r}_i F_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_i} \dot{r}_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{r}_i} \ddot{r}_i, \tag{4.17}$$

мы видим непосредственно, что оно может быть возможно только в том случае, когда F_i есть линейная функция $\ddot{r}_i$ и, следовательно, должна иметь вид

$$F_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i,\ \ddot{r}_i) = F_i^{(0)}(t;\ r_i,\ \dot{r}_i) + \ddot{r}_i F_i^{(1)}(t;\ r_i,\ \dot{r}_i). \tag{4.18}$$

Сравнение (4.17) и (4.18) приводит к условиям

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_i} \cdot \dot{r}_i &= \dot{r}_i F_i^{(0)}(t;\ r_i,\ \dot{r}_i), \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{r}_i} &= \dot{r}_i F_i^{(1)}(t;\ r_i,\ \dot{r}_i). \end{aligned}\right\} \tag{4.18'}$$

Рассматривая функцию F_i, а следовательно, и функции $F_i^{(0)}$ и $F_i^{(1)}$ как данные, а Φ_i как неизвестную, мы видим, что искомая функция Φ_i должна удовлетворять двум уравнениям (4.18′), которые поэтому должны быть совместными. Чтобы вывести условия совместности, предположим сначала, что функции F и Φ не зависят явно от времени t. Тогда частная производная по t от функции Φ равна нулю и, исключая в этом случае функцию Φ из уравнений (4.18′), мы получим условие, которому должны удовлетворять данные функции $F_i^{(0)}$ и $F_i^{(1)}$, в виде

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} F_i^{(0)}(r_i,\ \dot{r}_i) = \dot{r}_i \frac{\partial}{\partial r_i} F_i^{(1)}(r_i,\ \dot{r}_i). \tag{4.19}$$

Если это условие выполнено, то, интегрируя (4.18′), мы получим искомую функцию Φ_i при помощи формулы

$$\Phi_i(r_i,\ \dot{r}_i) = \int F_i^{(0)}\, dr_i + \int \left[\dot{r}_1 F_i^{(1)} - \int \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \dot{r}_i}\, dr_i\right] d\dot{r}_i.$$

Примером функции F_i, удовлетворяющей условию (4.19) и имеющей форму (4.18), является закон Вебера (4.5), а функция Φ_i, соответствующая этому закону, может быть вычислена по только что приведенной формуле.

Если заданная функция F_i содержит явно t, то условие совместности двух уравнений (4.18′) получается следующим образом: продифференцируем частным образом первое из уравнений (4.18′) по $\dot{r}_i$, а второе по t и r_i соответственно. Мы получим

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t\,\partial\dot{r}_i}+\dot{r}_i\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r_i\,\partial\dot{r}_i}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial r_i}=F_i^{(0)}+\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\dot{r}_i\,\partial t}=\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\dot{r}_i\,\partial r_i}=\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}.$$

Исключая из этих трех соотношений две частные производные второго порядка, мы получим

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial r_i}=F_i^{(0)}+\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i}-\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}-\dot{r}_i^2\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}.$$

Дифференцируя, наконец, последнее равенство частным образом по $\dot{r}_i$ и исключая из результата вторую производную с помощью последнего из трех написанных выше равенств, мы получим соотношение, не содержащее функции Φ_i и ее производных и являющееся поэтому условием совместности уравнений (4.18′):

$$(1+3\dot{r}_i)\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}=2\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}}+\dot{r}\frac{\partial^2F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i^2}-(\dot{r}_i+\dot{r}_i^2)\frac{\partial^2F_i^{(1)}}{\partial r_i\,\partial\dot{r}_0}.\qquad(4.20)$$

Итак, в случае выполнимости условия (4.19) или (4.20) общие уравнения (4.2) задачи n неподвижных центров допускают интеграл живой силы, который может быть использован иногда для понижения порядка системы или даже, в исключительных случаях, для полного интегрирования этих уравнений.

§ 2. Некоторые частные случаи задачи неподвижных центров

1. Простейшим случаем задачи неподвижных центров является, очевидно, тот, когда имеется только один неподвижный центр. Приняв этот неподвижный центр за начало неизменной, декартовой системы координат и сохраняя предположения, принятые в начале § 1, мы получим хорошо знакомые дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки, находящейся под действием центральной силы:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=-fm\frac{x}{r}\cdot F,\\ \ddot{y}&=-fm\frac{y}{r}\cdot F,\\ \ddot{z}&=-fm\frac{z}{r}\cdot F,\end{aligned}\right\}\qquad(4.21)$$

где m — масса неподвижного центра, находящегося в начале координат, f — множитель пропорциональности, который есть либо величина постоянная (положительная или отрицательная), либо заданная функция времени t,

$$F = F(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}) \tag{4.22}$$

— заданная функция, определяющая характер действия массы m на пассивную материальную точку, масса которой не входит в уравнения (4.21) и, как обычно;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

есть радиус-вектор движущейся точки M.

Известно, что уравнения (4.21) имеют три интеграла площадей,

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_3,$$

из которых следует также хорошо известное соотношение

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

показывающее, что в рассматриваемой задаче движение точки M всегда происходит в неизменной плоскости, которую удобно принять за одну из координатных плоскостей, например, за плоскость (xOy). Оставляя для координат точки M, движущейся в этой плоскости, те же обозначения x и y, мы приведем нашу задачу к интегрированию системы двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -fm\frac{x}{r}F, \\ \ddot{y} &= -fm\frac{y}{r}F, \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \ddot{r} &= \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y} + V^2 - \dot{r}^2}{r}, \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \end{aligned}\right\} \tag{4.23$'$}$$

с одним интегралом площадей

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi} = c, \tag{4.24}$$

что позволяет привести систему (4.23) к виду (4.12), т. е.

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -fmF(t,\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}) \tag{4.25}$$

и к квадратуре вида (4.12′)

$$\varphi - \varphi_0 = c\int_0^t \frac{dt}{r^2}. \qquad (4.25')$$

Если функция F удовлетворяет условиям (4.19) или (4.20), то существует также интеграл живой силы вида (4.16), который напишем сразу в полярных координатах

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

в форме

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = -fm\Phi(t, r, \dot{r}) + h. \qquad (4.26)$$

Исключая отсюда с помощью интеграла площадей угловую скорость $\dot{\varphi}$, получим единственное уравнение первого порядка

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) = -fm\Phi(t, r, \dot{r}) + h, \qquad (4.27)$$

в результате интегрирования которого найдем уравнение траектории (уравнение орбиты) с тремя произвольными постоянными c, h, C, которые нетрудно выразить через начальные значения r_0, $\dot{r}_0$, φ_0, $\dot{\varphi}_0$ или через начальные значения x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ координат и составляющих скорости точки M в плоскости орбиты.

Если закон силы F не зависит от времени, то функция Φ также не будет содержать время, вследствие чего в уравнении (4.27) можно взять за независимую переменную угол φ вместо t, а если ввести еще вместо r величину, пропорциональную обратному радиусу, полагая

$$\frac{c}{r} = u, \qquad (4.28)$$

то уравнение (4.26) примет вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -2\mu\Phi\left(\frac{c}{u}, -\frac{du}{d\varphi}\right) + 2h, \qquad (4.29)$$

где положено для краткости

$$\mu = fm. \qquad (4.28')$$

Разрешая уравнение (4.29) относительно производной $\frac{du}{d\varphi}$, разделяя затем переменные и интегрируя, мы получим уравнение орбиты в квадратурной форме

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\Psi(u, c, h, \mu)} = \varphi - \varphi_0, \qquad (4.30)$$

откуда, выполняя квадратуру и разрешая полученное равенство относительно u, получаем

$$u = \psi(\varphi - \varphi_0;\ u_0,\ c,\ h,\ \mu) \tag{4.30'}$$

или

$$r = \frac{c}{\psi\left(\varphi - \varphi_0;\ \frac{c}{r_0},\ c,\ h,\ \mu\right)}. \tag{4.30''}$$

Примечание. Если функция F, а следовательно, и функция Φ, зависят только от радиуса-вектора, то из (4.29) имеем просто

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -2\mu\Phi\left(\frac{c}{u}\right) + 2h, \tag{4.31}$$

откуда, после выполнения квадратуры и разрешения относительно u, опять получим уравнение орбиты в виде (4.30′) или (4.30″).

2. Вывод уравнения орбиты в окончательной форме зависит от разрешимости уравнения (4.29) и от выполнения квадратуры (4.30). И то и другое может оказаться весьма затруднительным или даже невыполнимым в элементарных функциях, и тогда остается воспользоваться разложением в ряд или применить методы численного интегрирования.

Рассмотрим теперь некоторые примеры задачи одного неподвижного центра, ограничиваясь простейшими случаями, когда задача оказывается так или иначе разрешимой.

Пусть сначала функция F определяется формулой типа (4.4″), т. е.

$$F = r^K = r^{-N}. \tag{4.32}$$

Тогда формула (4.31) дает

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2h - u^2 + \gamma u^{N-1}, \quad \gamma = \frac{2\mu c^{1-N}}{N-1}, \tag{4.31'}$$

откуда имеем

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{2h - u^2 + \gamma u^{N-1}}} = \pm(\varphi - \varphi_0). \tag{4.33}$$

Из (4.33) видим, что при $K = 1$ (закон Гука) и при $N = 2$ (закон Ньютона) интеграл вычисляется в элементарных функциях, причем в последнем случае уравнения (4.23) такие же, как и в классической задаче двух тел, которая подробно рассмотрена в любом курсе небесной механики. Случай закона Гука рассмотрен выше для любого числа неподвижных центров. При $N = 1$ имеем $\Phi = \ln r$ и интеграл в равенстве (4.33) сразу делается неэлементарным. При $N = 3$ интеграл опять вычисляется легко. При $N=0$, 4, 5 интеграл в (4.33) превращается в эллиптический и, следовательно, u выражается через эллиптические функции.

При $N=-3$, -5, $+7$ интеграл будет опять эллиптическим относительно переменной u^2 и задача опять будет разрешима в эллиптических функциях.

Можно показать, что задача может быть разрешена в эллиптических функциях также при

$$N=\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{3}.$$

Непосредственное вычисление интеграла в уравнении (4.33) мы предоставляем учащимся в качестве упражнения.

Рассмотрим теперь пример, когда функция Φ в уравнении (4.29) определяется законом Вебера, т. е. когда имеем

$$F(r,\ \dot{r},\ \ddot{r})=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma^2}+\frac{2r\ddot{r}}{\sigma^2}\right)$$

и, следовательно,

$$\Phi(r,\ \dot{r})=-\frac{1}{r}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma^2}\right).$$

В этом случае уравнение (4.29) напишется в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{2\mu u}{c}\left[1-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]+h,$$

откуда

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{2h+\frac{2\mu}{c}u-u^2}{1+\frac{2\mu u}{c\sigma^2}}$$

и

$$\int\limits_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{1+\frac{2\mu u}{c\sigma^2}}{2h+\frac{2\mu}{c}u-u^2}}\,du=\pm(\varphi-\varphi_0).$$

Мы снова приходим к эллиптическому интегралу, а поэтому u, а следовательно, и r выражаются через эллиптические функции.

Непосредственное приведение эллиптических интегралов в рассмотренных выше задачах, а затем их обращение удобно производить при помощи широко известных таблиц И. С. Градштейна и И. М. Рыжика (Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е, Физматгиз, 1962).

После нахождения u, или r, мы должны затем установить связь между полярным углом φ и временем t при помощи уравнения (4.25′), что обычно не удается сделать в конечном виде даже при помощи эллиптических функций.

Поэтому здесь приходится прибегать всегда к бесконечным рядам. Пример такого представления дает даже простейшая задача двух тел (материальных точек).

3. Приведем теперь классический пример задачи с одним неподвижным центром, в котором правые части уравнений (4.23) содержат явно время t. Пример такого рода дает нам задача, называемая в настоящее время *задачей И. В. Мещерского*, где или масса неподвижного центра m, или коэффициент пропорциональности f (или и то и другое вместе) зависят известным образом от времени, а закон силы F — ньютоновский. Уравнения (4.23) напишутся тогда в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu(t)\cdot\frac{x}{r^3} = 0,\\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu(t)\cdot\frac{y}{r^3} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

где $\mu(t)$, определяемая формулой (4.28′), есть заданная функция времени.

И. В. Мещерский впервые показал, что в некоторых случаях уравнения (4.34) путем преобразования зависимых и независимой переменных возможно привести к уравнениям, правые части которых не будут содержать независимой переменной и, кроме того, могут быть проинтегрированы до конца в элементарных или в эллиптических функциях.

Действительно, введем новые зависимые переменные ξ и η и новую независимую переменную τ, положив

$$\xi = x\psi(t), \quad \eta = y\psi(t), \quad d\tau = \sigma(t)\,dt, \tag{4.34′}$$

где $\psi(t)$ и $\sigma(t)$ — две пока неизвестные функции, выбором которых мы распорядимся несколько позже.

Вычисляя вторые производные от ξ и η по переменной τ и имея ввиду первоначальные уравнения, мы получим без труда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\frac{\mu\psi^3}{\sigma^2}\cdot\frac{\xi}{\rho^3} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{2\psi'}{\psi} - \frac{\sigma'}{\sigma}\right)\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\psi\psi'' - 2\psi'^2}{\psi^2\sigma^2}\cdot\xi,\\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\frac{\mu\psi^3}{\sigma^2}\cdot\frac{\eta}{\rho^3} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{2\psi'}{\psi} - \frac{\sigma'}{\sigma}\right)\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\psi\psi'' - 2\psi'^2}{\psi^2\sigma^2}\cdot\eta, \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

где штрихи обозначают производные от ψ и σ по времени и

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2. \tag{4.35′}$$

Теперь постараемся выбрать функции ψ и σ так, чтобы в правые части равенств (4.35) не входило t.

Для этого положим прежде всего

$$\frac{2\psi'}{\psi} - \frac{\sigma'}{\sigma} = 0, \tag{4.36}$$

вследствие чего в уравнениях (4.35) исчезнут члены с первыми производными от новых зависимых переменных.

Из (4.36) интегрированием получаем

$$\sigma = C \cdot \psi^2, \tag{4.36'}$$

где C — постоянная.

Чтобы в уравнения (4.35) не вошла переменная τ, а следовательно, и t, должны еще удовлетворяться условия

$$\frac{\psi\psi'' - 2\psi'^2}{\psi^2\sigma^2} = \text{const}, \quad \frac{\mu\psi^3}{\sigma^2} = \mu_0 = \text{const}.$$

Исключая из первого равенства σ посредством (4.36′), мы получим для функции ψ простенькое дифференциальное уравнение вида

$$\frac{1}{\psi^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right) = \text{const},$$

откуда без труда находим ψ, а затем и функцию μ, которой можно придать следующую форму:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + 2\beta t + \gamma t^2}}. \tag{4.37}$$

Отсюда мы заключаем, что переменная τ и первые производные от ξ и η не будут входить в уравнения (4.35) при условии, что функция $\mu(t)$ определяется формулой (4.37). Преобразование (4.34′), соответствующее этому случаю, напишется в виде

$$\xi = \mu(t) \cdot x, \quad \eta = \mu(t) \cdot y, \quad d\tau = \mu^2(t) \cdot dt, \tag{4.37'}$$

и уравнения (4.34) преобразуются в следующие:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\frac{\mu_0\xi}{\rho^3} + \alpha\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\frac{\mu_0\eta}{\rho^3} + \alpha\eta, \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

где

$$\alpha = \frac{\beta^2 - \gamma}{\mu_0^4}, \tag{4.38'}$$

а μ_0 — начальное значение функции $\mu(t)$, соответствующее начальному значению $t = 0$, а β и γ — какие угодно постоянные.

Таким образом, задача о движении пассивной точки M, определяемая уравнениями (4.34), приводится преобразованием (4.37′) с функцией $\mu(t)$ вида (4.37) к задаче о движении точки, притягиваемой (или отталкиваемой) неподвижным центром по закону Ньютона и под действием силы, пропорциональной расстоянию до неподвижного центра (закон Гука!), причем эта сила есть сила притяжения, если $\gamma > \beta^2$, и отталкивания, если $\gamma < \beta^2$. Если

$$\gamma = \beta^2,$$

то сила Гука отсутствует и функция (4.37) приводится к простейшему виду

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+\beta t}. \tag{4.37''}$$

Заметим, что И. В. Мещерский доказывает (Работы по механике тел переменной массы, Гостехиздат, 1949), что случай (4.37) является единственным, когда уравнения (4.34) могут быть приведены к виду (4.38).

Однако этот случай вовсе не является единственным, когда уравнения вида (4.34) могут быть приведены к уравнениям, отличным от (4.38), но оказывающимися все же интегрируемыми.

Такие случаи изучены в работах советского ученого Б. Е. Гельфгата (Бюллетень ИТА, 1959 г.), который показал, в частности, что если функция $\mu(t)$ изменяется со временем по закону

$$\frac{d\mu}{dt} = A\mu^n \qquad (A = \text{const}), \tag{4.39}$$

то уравнения (4.34) допускают строгое интегрирование в случаях

$$n = 0, \quad n = \frac{3}{2},$$

причем результат интегрирования содержит, кроме элементарных еще цилиндрические функции.

Заметим, что законы И. В. Мещерского получаются из уравнения (4.39) при $n = 2$ и $n = 3$ и окончательное решение получается только в элементарных функциях, если $\alpha = 0$ (что соответствует случаю кеплеровского движения), или в эллиптических функциях, если $\alpha \neq 0$, так как в этом случае к ньютоновой силе присоединяется сила Гука и решение задачи приводится к уравнению типа (4.31).

Примечание. К рассмотренным в последнем разделе задачам можно привести порядочное число различных задач иного рода. Ограничимся только одним примером. Пусть неподвижный центр окружен газовой или пылевой атмосферой, имеющей сферическую структуру, с плотностью, зависящей от времени, оказывающей на движущуюся точку силу сопротивления, пропорциональную плотности атмосферы и скорости движущейся точки

Тогда вместо уравнений (4.34) будем иметь следующие:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(t)\cdot\frac{x}{r^3}+\frac{4}{3}\pi\delta(t)\cdot x+\lambda\delta(t)\frac{dx}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\mu(t)\cdot\frac{y}{r^3}+\frac{4}{3}\pi\delta(t)\cdot y+\lambda\delta(t)\frac{dy}{dt}=0,$$

где $\delta(t)$ — плотность атмосферы, λ — постоянный коэффициент пропорциональности и $\pi=3{,}14159\ldots$

Если функция $\mu(t)$ и плотность $\delta(t)$ определяются формулами ($\beta=2\lambda\delta_0$)

$$\mu(t)=\frac{\mu}{1+\beta t},\quad \delta(t)=\frac{\delta_0}{1+\beta t},$$

то предыдущие уравнения посредством введения полярных координат и новой независимой переменной τ формулой

$$d\tau=dt\cdot e^{-\lambda\int\limits_0^t\delta(t)\,dt}$$

приводятся к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}-\frac{c^2}{r^3}+\mu_1 r+\frac{\mu_0}{r^2}=0,$$

где c — постоянная и $\mu_1=\frac{4}{3}\pi\delta_0$.

Это уравнение подстановкой (4.28) приводится к виду (4.31) и может быть проинтегрировано в эллиптических функциях.

Действительно, умножая предыдущее уравнение на $2\frac{dr}{d\tau}$ и интегрируя, получим

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=2\left[h+\frac{\mu_0}{r}-\frac{1}{2}\mu_1 r^3-\frac{c^2}{r^3}\right],$$

откуда интегрированием получаем

$$\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{h+\frac{\mu_0}{r}-\frac{\mu_1}{2}r^3-\frac{c^2}{r^3}}}=\pm\sqrt{2}\,(\tau-\tau_0),$$

и интеграл в этой формуле действительно эллиптический. Здесь h, так же как и c, есть произвольная постоянная и τ_0 — значение вспомогательной переменной τ, соответствующее начальному значению времени $t=0$.

4. В качестве последнего примера этого параграфа рассмотрим вкратце наиболее известную из задач теории неподвижных центров, а именно задачу двух неподвижных центров. Краткость изложения в этом случае объясняется тем, что классическая задача двух неподвижных центров подробно изложена в первом издании настоящей книги, а также во втором и третьем изданиях книги автора «Небесная механика. Основные задачи и методы». Кроме того, обобщенная задача двух неподвижных центров составляет основное содержание упоминавшейся монографии профессора Е. П. Аксенова.

Здесь мы будем рассматривать задачу двух неподвижных центров как частный случай общей задачи многих неподвижных центров. Пусть имеются только два неподвижных центра M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 соответственно. Выберем неизменную систему координат так, чтобы одна из координатных осей (пусть это будет ось Oz) проходила через эти неподвижные центры.

Тогда уравнения нашей задачи можно написать в виде (4.2), и мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -x\left(\mu_1\frac{F_1}{r_1}+\mu_2\frac{F_2}{r_2}\right),\\ \ddot{y} &= -y\left(\mu_1\frac{F_1}{r_1}+\mu_2\frac{F_2}{r_2}\right),\\ \ddot{z} &= (c_1-z)\mu_1\frac{F_1}{r_1}+(c_2-z)\mu_2\frac{F_2}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

где F_1 и F_2 — функции такого же характера, как и функции (4.1), т. е. вообще

$$F_1=F_1(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1),\quad F_2=F_2(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2), \tag{4.40'}$$

и $\mu_1 = f_1m_1$, $\mu_2 = f_2m_2$ — вещественные постоянные или вообще заданные функции времени t.

Наконец,

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2+y^2+(z-c_1)^2},\\ r_2 &= \sqrt{x^2+y^2+(z-c_2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.40''}$$

являются расстояниями (радиусами-векторами) от движущейся пассивной точки $M(x,\ y,\ z)$ до активных неподвижных центров M_1 $(0,\ 0,\ c_1)$ и $M_2(0,\ 0,\ c_2)$.

Как было показано выше, в общем случае уравнения (4.40) всегда допускают интеграл площадей в плоскости (xOy)

$$y\dot{x}-x\dot{y}=c=\text{const}. \tag{4.41}$$

Поэтому, вводя вместо x и y полярные координаты ρ и φ формулами (4.9), мы можем заменить систему 6-го порядка (4.40) системой 4-го порядка с неизвестными ρ и z (цилиндрические координаты) следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho}-\frac{c^2}{\rho^3} &= -\rho\left(\mu_1\frac{F_1}{r_1}+\mu_2\frac{F_2}{r_2}\right),\\ \ddot{z} &= (c_1-z)\mu_1\frac{F_1}{r_1}+(c_2-z)\mu_2\frac{F_2}{r_2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

и уравнением, вытекающим из (4.41):

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{4.41'}$$

Разрешая систему (4.42), мы получим цилиндрические координаты в функции времени, постоянной c, которая является произвольной постоянной, и еще четырех произвольных постоянных, за которые можно принять ρ_0, $\dot{\rho}_0$, z_0, $\dot{z}_0$, т. е. начальные значения (для $t = 0$) цилиндрических координат и их первых производных.

Беря затем квадратуру из (4.41′), мы получим соотношение

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t \frac{dt}{\rho^2}, \tag{4.42'}$$

связывающее полярный угол φ с временем и содержащее шестую произвольную постоянную задачи φ_0.

Расстояния r_1, r_2 и их производные первого и второго порядка определяются формулами (4.11′), где нужно положить $j = 1, 2$.

Заметим, что при произвольных значениях μ_1, μ_2 и функций F_1 и F_2 уравнения (4.42) пригодны также для определения движения точки M в любой плоскости, проходящей через ось Oz, в том числе и в плоскости (xOz) или (yOz). Для этого нужно только, чтобы в начальный момент точка M находилась в этой плоскости и чтобы вектор ее начальной скорости также лежал в этой плоскости. При этом уравнение (4.41′) отпадает.

Но движение точки M в плоскости (xOy) возможно, очевидно, только в том случае, когда точки M_1 и M_2 симметричны относительно начала координат и когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Действительно, при высказанных условиях $r_1 = r_2 = r$, а следовательно, при всяком значении t также $F_1 = F_2 = F$ и второе из уравнений (4.42) удовлетворяется при $z = 0$ тождественно. Следовательно, в этом случае задача сводится к первому из уравнений (4.42) и к квадратуре (4.42′). При этом первое из уравнений (4.42) принимает более простой вид

$$\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = -\mu \frac{\rho}{r} F(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}), \tag{4.43}$$

где

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2}, \\ \bar{c} &= c_1 = -c_2. \end{aligned} \right\} \tag{4.43'}$$

Возвратимся теперь к уравнениям (4.40) и предположим, что каждая из функций F_1 и F_2 удовлетворяет условию (4.20). Тогда существуют такие две новые функции $\Phi_1(t;\ r_1,\ \dot{r}_1)$ и

$\Phi_2(t;\ r_2,\ \dot{r}_2)$, что мы будем иметь

$$\dot{r}_1 F_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}, \qquad \dot{r}_2 F_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}. \tag{4.44}$$

Тогда, как мы показали в общем случае, уравнения (4.40) допускают интеграл живой силы, который напишется следующим образом:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\mu_1\Phi_1 - \mu_2\Phi_2 + h. \tag{4.45}$$

Для уравнений (4.42), определяющих цилиндрические координаты, интеграл живой силы принимает вид

$$\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = -\mu_1\Phi_1 - \mu_2\Phi_2 + h, \tag{4.45'}$$

или (с учетом интеграла площадей)

$$\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} + \dot{z}^2 = -2\mu_1\Phi_1 - 2\mu_2\Phi_2 + 2h, \tag{4.45''}$$

причем в (4.45′) и (4.45″)

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z - c_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z - c_2)^2}.$$

Для случая, когда возможно движение в плоскости (xOy), т. е. для уравнения (4.43), интеграл живой силы имеет еще более простой вид:

$$\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} = -4\mu\Phi\left(t;\ \sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2}\ ;\ \frac{\rho\dot{\rho}}{\sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2}}\right) + 2h.$$

Если притом закон силы F зависит только от r, а следовательно, функция Φ в последнем уравнении зависит только от ρ, то интеграл живой силы примет вид

$$\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} = -2\mu\Phi\left(\sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2}\right) + 2h, \tag{4.46}$$

и это уравнение можно непосредственно интегрировать.

Однако предпочтительнее ввести в (4.46) вместо времени переменную φ посредством (4.41) и получить дифференциальное уравнение орбиты (или траектории) в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -2\mu\Phi\left(\frac{1}{u}\sqrt{c^2 + \bar{c}^2 u^2}\right) + 2h, \tag{4.46'}$$

причем в формулах (4.45), (4.45′), (4.46), (4.46′) величины μ_1, μ_2 и μ должны рассматриваться как постоянные, а u, как и ранее, есть величина, обратно пропорциональная радиусу-вектору ρ, т. е. $u = c/\rho$.

Из уравнения (4.46′) получаем уравнение орбиты в квадратурной форме

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{2h - u^2 - 2\mu\Phi}} = \pm (\varphi - \varphi_0), \tag{4.47}$$

но выполнение квадратуры зависит, конечно, от вида закона силы F.

5. Для классической задачи двух неподвижных центров

$$F_1 = \frac{1}{r_1^2}, \quad F_2 = \frac{1}{r_2^2}$$

и

$$\mu_1 = fm_1, \quad \mu_2 = fm_2,$$

где f — обычная постоянная притяжения.

Уравнения (4.40) будут иметь обычный вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -fx\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right), \\ \ddot{y} &= -fy\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right), \\ \ddot{z} &= f\left(m_1\frac{c_1 - z}{r_1^3} + m_2\frac{c_2 - z}{r_2^3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

или, в цилиндрических координатах,

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} &= -f\rho\left\{\frac{m_1}{[\rho^2 + (z - c_1)^2]^{3/2}} + \frac{m_2}{[\rho^2 + (z - c_2)^2]^{3/2}}\right\}, \\ \ddot{z} &= f\left\{\frac{m_1(c_1 - z)}{[\rho^2 + (z - c_1)^2]^{3/2}} + \frac{m_2(c_2 - z)}{[\rho^2 + (z - c_2)^2]^{3/2}}\right\}, \\ \rho^2\frac{d\varphi}{dt} &= c. \end{aligned}\right\} \tag{4.48′}$$

Наконец, уравнение (4.43) движения пассивной точки в плоскости (xOy), которое возможно только в случае

$$m_1 = m_2 = m, \quad c_1 = -c_2 = \bar{c},$$

принимает следующий вид:

$$\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = -\frac{2fm\rho}{(\rho^2 + \bar{c}^2)^{3/2}}. \tag{4.48″}$$

Так как в классической задаче функции Φ_1 и Φ_2 существуют и определяются формулами

$$\Phi_1 = -\frac{1}{r_1}, \quad \Phi_2 = -\frac{1}{r_2},$$

то существует также и интеграл живой силы, который в прямоугольных координатах напишется в виде

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2fm_1}{r_1}+\frac{2fm_2}{r_2}+2h, \tag{4.49}$$

и соответственно в цилиндрических координатах,

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}+\dot{z}^2=\frac{2fm_1}{r_1}+\frac{2fm_2}{r_2}+2h. \tag{4.49'}$$

Уравнение (4.48″), наконец, имеет интеграл

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}=\frac{4fm}{\sqrt{\rho^2+\bar{c}^2}}+2h \tag{4.49''}$$

или

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{4fmu}{\sqrt{c^2+\bar{c}^2u^2}}+2h,$$

откуда уравнение орбиты получается, как и в случае (4.47), простой квадратурой.

Уравнения (4.48) так же, как известно, интегрируются в квадратурах, но только после преобразования прямоугольных координат к эллипсоидальным координатам Ламе.

Отметим также случай, когда в задаче двух неподвижных центров вместо закона Ньютона имеем закон Вебера (4.5).

Тогда (при постоянных μ_1, μ_2, σ_1, σ_2) имеем интеграл живой силы типа (4.16′)

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2\mu_1}{r_1}\left[1-\frac{\dot{r}_1^2}{\sigma_1^2}\right]+\frac{2\mu_2}{r_2}\left[1-\frac{\dot{r}_2^2}{\sigma_2^2}\right]+2h$$

или, в цилиндрических координатах,

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}+\dot{z}^2=\frac{2\mu_1}{r_1}\left[1-\frac{\dot{r}_1^2}{\sigma_1^2}\right]+\frac{2\mu_2}{r_2}\left[1-\frac{\dot{r}_2^2}{\sigma_2^2}\right]+2h.$$

Когда движение пассивной точки M возможно в плоскости (xOy), т. е. когда

$$m_1=m_2=m, \quad c_1=-c_2=\bar{c}$$

и, кроме того, $\sigma_1=\sigma_2$, мы можем написать интеграл

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}=\frac{4fm}{r}\left[1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma^2}\right]+2h,$$

где

$$r=\sqrt{\rho^2+\bar{c}^2}, \quad \dot{r}=\frac{\rho\dot{\rho}}{\sqrt{\rho^2+\bar{c}^2}}.$$

Вводя опять вместо t угол φ и вместо ρ величину u, разрешая полученное уравнение относительно производной от u по φ, разделяя переменные и интегрируя, мы получим квадратурное уравнение орбиты, которое напишем в следующей форме:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{v^4 + a^2u^2}}{\sqrt[4]{u^2v^3}}\, du = \pm 2\sqrt{fm} \cdot (\varphi - \varphi_0),$$

где положено для сокращения

$$v = \sqrt{c^2 + \bar{c}^2u^2}, \quad a^2 = \frac{4fmc^3}{\sigma^2}.$$

Таким образом, плоская задача двух симметричных неподвижных центров с равными массами разрешается в квадратурах.

Однако интеграл, входящий в уравнение орбиты, не является элементарным, и исследование свойств орбиты оказывается весьма трудной и сложной задачей.

В общем, несимметричном случае, с неравными массами задача двух неподвижных центров, действующих на пассивную точку по закону Вебера, сводится к системе третьего порядка, в которой одно уравнение (интеграл живой силы) первого порядка, а второе (одно из двух уравнений движения в цилиндрических координатах) — второго порядка

Если пассивная точка движется в плоскости, проходящей через ось Oz, то и в этом случае уравнения движения образуют неинтегрируемую систему третьего порядка и только отпадает интеграл площадей и не приходится выполнять дополнительную квадратуру.

В заключение заметим, что в некоторых случаях задача двух неподвижных центров может иметь простые частные решения.

Эти случаи мы упомянем ниже, в соответствующем месте.

Глава V

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

В предыдущей главе мы рассматривали задачу о движении пассивно действующей материальной точки, находящейся под действием заданных сил, исходящих от неподвижных центров. Мы упомянули также, что представляет интерес рассмотреть еще более общую задачу, предполагая, что пассивная точка движется под действием активных масс, каждая из которых обладает заданным движением. Такие задачи называются в небесной механике — *ограниченными задачами*. Число активно действующих масс вообще может быть каким угодно. Например, при изучении полета космического корабля (искусственного небесного тела!) в пределах Солнечной системы мы, естественно, можем считать, что это искусственное тело не оказывает никакого влияния и воздействия на планеты и их спутники. Движение планет мы можем считать заданным, так как эта задача издавна изучается в небесной механике, и мы знаем и свойства их движения и умеем рассчитывать их положения и скорости при помощи аналитических или хотя бы численных методов. Более того, так как планеты Солнечной системы движутся почти в одной плоскости и почти по круговым орбитам, то мы можем считать (по крайней мере в течение не очень большого промежутка времени), что активные тела в рассматриваемой модельной задаче движутся по окружностям, лежащим в одной плоскости. Такого рода задачи называются *круговыми ограниченными задачами*. Например, можно рассматривать в первом приближении движение Луны под действием притяжения Земли и Солнца, считая, что Луна не оказывает на Солнце и Землю никакого влияния.

Эта задача была поставлена впервые и решалась при помощи рядов еще Эйлером и с тех пор неизменно привлекала к себе внимание многих знаменитых астрономов и математиков. В настоящее время одной из важнейших задач современной небесной механики является задача о движении искусственного тела (искусственного спутника, космического корабля или небесной лаборатории) под действием притяжения Земли и Луны. Поэтому ограниченная задача трех тел играет теперь весьма важную роль и изучается весьма подробно и численными, и математическими методами.

Рассмотрению некоторых важнейших случаев этой задачи и установлению некоторых главнейших результатов в ее исследовании и посвящена эта глава нашей книги.

Заметим при этом, что классическая задача, т. е. задача о движении пассивного тела под действием ньютоновского притяжения двух активных масс была рассмотрена нами в существенных чертах и в первом издании этой книги и во втором и третьем изданиях нашей книги «Небесная механика. Основные задачи и методы».

Поэтому здесь мы будем рассматривать обобщенную ограниченную задачу в том же смысле, в котором мы рассматривали задачу неподвижных центров в предыдущей главе.

Классический случай ограниченной задачи трех тел мы будем отмечать просто как частный случай более общей задачи.

Наконец, хотя в большей части мы будем рассматривать все тела (как и в классической небесной механике) как материальные точки, но в заключительном параграфе мы дадим также некоторое представление и о том естественном случае, когда тела являются абсолютно твердыми телами, имеющими конечные размеры.

§ 1. Постановка задачи и уравнения движения

Мы предпочитаем трактовать ограниченную задачу трех тел как частный случай общей задачи, а поэтому поставим сначала общую задачу трех материальных точек и выпишем соответствующие уравнения движения.

1. Рассмотрим три материальные точки M_0, M_1, M_2 с постоянными, конечными массами m_0, m_1, m_2 соответственно. Предположим, аналогично тому, как было сделано в предыдущей главе, что на каждую точку M_i $(i = 0, 1, 2)$ действует сила, исходящая от точки M_j $(j \neq i)$, направленная по прямой, соединяющей эти две точки, и пропорциональная произведению их масс и некоторой заданной функции времени, взаимного расстояния Δ_{ij} и его первых двух производных по времени $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$. То есть эта функция, определяющая закон силы, действующей на точку M_i, имеет такой же характер, как и функция (4.1), Множители пропорциональности f_{ij} — или вещественные постоянные (положительные или отрицательные), или некоторые вещественные функции времени.

Кроме того, мы будем предполагать, как и раньше, что третья аксиома Ньютона вообще не имеет места, т. е., что

$$F_{ji} \neq F_{ij}. \qquad (5.1)$$

Выберем каким-нибудь образом некоторую прямоугольную систему декартовых координат с началом в фиксированной точке O и с неизменными направлениями осей $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$. Обозначая координаты точки M_i в этой системе буквами ξ_i, η_i, ζ_i, мы можем написать дифференциальные уравнения движения трех точек следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\ddot{\xi}_0 &= f_{01}m_0m_1F_{01}\frac{\xi_1-\xi_0}{\Delta_{01}} + f_{02}m_0m_2F_{02}\frac{\xi_2-\xi_0}{\Delta_{02}},\\
m_0\ddot{\eta}_0 &= f_{01}m_0m_1F_{01}\frac{\eta_1-\eta_0}{\Delta_{01}} + f_{02}m_0m_2F_{02}\frac{\eta_2-\eta_0}{\Delta_{02}},\\
m_0\ddot{\zeta}_0 &= f_{01}m_0m_1F_{01}\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\Delta_{01}} + f_{02}m_0m_2F_{02}\frac{\zeta_2-\zeta_0}{\Delta_{02}},\\
m_1\ddot{\xi}_1 &= f_{10}m_1m_0F_{10}\frac{\xi_0-\xi_1}{\Delta_{10}} + f_{12}m_1m_2F_{12}\frac{\xi_2-\xi_1}{\Delta_{12}},\\
m_1\ddot{\eta}_1 &= f_{10}m_1m_0F_{10}\frac{\eta_0-\eta_1}{\Delta_{10}} + f_{12}m_1m_2F_{12}\frac{\eta_2-\eta_1}{\Delta_{12}},\\
m_1\ddot{\zeta}_1 &= f_{10}m_1m_0F_{10}\frac{\zeta_0-\zeta_1}{\Delta_{10}} + f_{12}m_1m_2F_{12}\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\Delta_{12}},\\
m_2\ddot{\xi}_2 &= f_{20}m_2m_0F_{20}\frac{\xi_0-\xi_2}{\Delta_{20}} + f_{21}m_2m_1F_{21}\frac{\xi_1-\xi_2}{\Delta_{21}},\\
m_2\ddot{\eta}_2 &= f_{20}m_2m_0F_{20}\frac{\eta_0-\eta_2}{\Delta_{20}} + f_{21}m_2m_1F_{21}\frac{\eta_1-\eta_2}{\Delta_{21}},\\
m_2\ddot{\zeta}_2 &= f_{20}m_2m_0F_{20}\frac{\zeta_0-\zeta_2}{\Delta_{20}} + f_{21}m_2m_1F_{21}\frac{\zeta_1-\zeta_2}{\Delta_{21}},
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

где

$$\begin{gathered}
f_{ji} \neq f_{ij},\\
\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i-\eta_j)^2+(\zeta_i-\zeta_j)^2},\\
F_{ij} = F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}) \qquad (i,\ j=0,\ 1,\ 2;\ j\neq i).
\end{gathered} \tag{5.2'}$$

Если в уравнениях (5.2) положить

$$f_{ji} = f_{ij} = f = \mathrm{const}, \quad F_{ji} = F_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}^2},$$

то мы получим обычные уравнения движения классической задачи трех тел (материальных точек) в абсолютной системе координат.

Законы сил F_{ij} в уравнениях (5.2) мы считаем вообще какими угодно заданными функциями, лишь бы они удовлетворяли тем общим требованиям, которые обеспечивают существование и единственность решения системы (5.2) при произвольно заданных начальных значениях

$$\xi_i^{(0)},\ \eta_i^{(0)},\ \zeta_i^{(0)},\ \dot{\xi}_i^{(0)},\ \dot{\eta}_i^{(0)},\ \dot{\zeta}_i^{(0)} \qquad (i=0,\ 1,\ 2),$$

для которых ни одно из начальных трех взаимных расстояний не равно нулю.

Не рассматривая здесь вопроса о существовании первых интегралов системы (5.2) (что будет предметом общего рассмотрения в третьей части книги), заметим, что всегда возможно перейти от абсолютных координат к относительным, выбирая какую-либо из трех точек за начало новой системы координат.

Примем за начало новой системы координат точку M_0, оставляя новые координатные оси Ox, Oy, Oz, соответственно параллельными абсолютным осям. Обозначая через x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 координаты точек M_1 и M_2 в новой системе, так что

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \xi_0, \quad y_1 = \eta_1 - \eta_0, \quad z_1 = \zeta_1 - \zeta_0, \\ x_2 &= \xi_2 - \xi_0, \quad y_2 = \eta_2 - \eta_0, \quad z_2 = \zeta_2 - \zeta_0, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

мы получим новые уравнения движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1} x_1 - m_2F_{02}\frac{x_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{x_2 - x_1}{\Delta}, \\
\ddot{y}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1} y_1 - m_2F_{02}\frac{y_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{y_2 - y_1}{\Delta}, \\
\ddot{z}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1} z_1 - m_2F_{02}\frac{z_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{z_2 - z_1}{\Delta}, \\
\ddot{x}_2 &= -\frac{m_0F_{20} + m_2F_{02}}{r_2} x_2 - m_1F_{01}\frac{x_1}{r_1} + m_1F_{21}\frac{x_1 - x_2}{\Delta}, \\
\ddot{y}_2 &= -\frac{m_0F_{20} + m_2F_{02}}{r_2} y_2 - m_1F_{01}\frac{y_1}{r_1} + m_1F_{21}\frac{y_1 - y_2}{\Delta}, \\
\ddot{z}_2 &= -\frac{m_0F_{20} + m_2F_{02}}{r_2} z_2 - m_1F_{01}\frac{z_1}{r_1} + m_1F_{21}\frac{z_1 - z_2}{\Delta},
\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

где для трех взаимных расстояний введены более удобные теперь обозначения

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= \Delta_{01} = \Delta_{10} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\
r_2 &= \Delta_{02} = \Delta_{20} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \\
\Delta &= \Delta_{12} = \Delta_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.4'}$$

Таким образом, F_{01} и F_{10} суть функции t, r_1, $\dot{r}_1$, $\ddot{r}_1$; F_{02} и F_{20} — функции t, r_2 $\dot{r}_2$, $\ddot{r}_2$; наконец, F_{12} и F_{21} — функции t, Δ, $\dot{\Delta}$, $\ddot{\Delta}$.

Уравнения (5.4) составляют систему 12-го порядка с шестью неизвестными функциями, определяющую движения точек M_1 и M_2 относительно точки M_0 и неизменных осей.

Однако, в отличие от классической задачи трех тел, уравнения (5.4) не равносильны уравнениям (5.2), так как из девяти абсолютных координат три остаются неизвестными и для их определения надобно еще проинтегрировать дополнительную систему шестого порядка с тремя неизвестными.

Заметим еще, что для сокращения мы включили множители пропорциональности f_{ij} в функции F_{ij}, так что в уравнениях (5.4) F_{ij} обозначает произведение $f_{ij}F_{ij}$ из уравнений (5.2).

Первые и вторые производные от расстояний (5.4′) определяются формулами

$$\dot{r}_i = \frac{x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i}{r_i},$$

$$\ddot{r}_i = \frac{x_i\ddot{x}_i + y_i\ddot{y}_i + z_i\ddot{z}_i + \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 - \dot{r}_i^2}{r_i} \qquad (i = 1,\ 2),$$

$$\dot{\Delta} = \frac{(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (z_2 - z_1)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)}{\Delta},$$

$$\Delta\ddot{\Delta} + \dot{\Delta}^2 = (x_2 - x_1)(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + (z_2 - z_1)(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) + \\ + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2.$$

2. В предыдущем разделе все три массы являются активно действующими и каждая из них действует на две другие с различными, вообще, силами.

Теперь мы переходим к главному предмету этого параграфа — к ограниченной задаче трех тел (материальных точек), предполагая, что одна из трех точек, — пусть это будет точка M_2, — является пассивной и не оказывает никакого действия на точки M_0 и M_1. Тогда

$$F_{02} = F_{12} = 0,$$

и уравнения (5.4) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}x_1, \\ \ddot{y}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}y_1, \\ \ddot{z}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}z_1, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

что составляет независимую систему трех уравнений с тремя неизвестными, определяющую движение точки M_1 относительно M_0, и

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -\frac{m_0F_{20}}{r_2}x_2 - \frac{m_1F_{01}}{r_1}x_1 + \frac{m_1F_{21}}{\Delta}(x_1 - x_2), \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{m_0F_{20}}{r_2}y_2 - \frac{m_1F_{01}}{r_1}y_1 + \frac{m_1F_{21}}{\Delta}(y_1 - y_2), \\ \ddot{z}_2 &= -\frac{m_0F_{20}}{r_2}z_2 - \frac{m_1F_{01}}{r_1}z_1 + \frac{m_1F_{21}}{\Delta}(z_1 - z_2). \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Эти уравнения, в которых координаты точки M_1 и их производные определяются уравнениями (5.5) и поэтому должны рассматриваться как известные функции времени, и являются уравнениями общей (или обобщенной) ограниченной задачи трех тел (трех материальных точек). Отметим при этом, что масса m_2 пассивной точки M_2 не входит в эти уравнения и может быть какой угодно. Просто эта масса не оказывает никакого действия на две другие массы. Можно считать, так же как это делается часто в математических классических исследованиях, что m_2 равна нулю, и в результате такого предположения мы получим те же самые уравнения (5.6). В астрономических задачах масса m_2 оказывается чрезвычайно малой по сравнению с массами m_0 и m_1. Поэтому действие малой массы по закону Ньютона достаточно мало́ и этим малым действием в ряде случаев можно, оказывается, пренебречь, так что в задаче масса m_2 как бы не существует или как бы не действует. Таким образом, к ограниченной задаче можно подойти двумя путями: или считая, что точка M_2 имеет массу, равную нулю (ее часто так и называют «нулевая масса»!), или считая, как это делаем мы, что масса m_2 не равна нулю, но не действует на две другие, что и отмечается здесь в ее названии — *пассивно действующая*, или просто *пассивная масса*. Математическая задача, т. е. задача об исследовании и решении уравнений (5.6), не зависит от ее астрономической постановки, но, с одной стороны, странно говорить о движении нулевой массы, т. е. о движении чего-то, что в действительности не существует, а, с другой стороны, может показаться нереальным предположение о том, что конечная масса никак себя не обнаруживает, хотя ее движение может быть наблюдаемо (например, движение космической ракеты!). Все дело в том, что и в том, и в другом случае задача является приближенной, и система трех материальных точек, и в случае общей задачи и в случае ограниченной, представляет собой только абстрактную модель действительно существующих в природе систем небесных тел.

После этого методологического отступления вернемся к нашей математической задаче, т. е. к дифференциальным уравнениям (5.5) и (5.6). Заметим сначала, что, полагая для сокращения

$$m_0F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)+m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)=F, \tag{5.5'}$$

мы представим уравнения (5.5) в более простой форме

$$\ddot{x}_1=-F\cdot\frac{x_1}{r_1},\quad \ddot{y}_1=-F\cdot\frac{y_1}{r_1},\quad \ddot{z}_1=-F\cdot\frac{z_1}{r_1}. \tag{5.7}$$

Эти уравнения имеют такую же форму, как и уравнения (4.21) § 2 главы IV задачи одного неподвижного центра, если положить в них $f_m = 1$.

Поэтому, прилагая к уравнениям (5.7) уже известные результаты, мы можем заключить, что точка M_1 движется относительно точки M_0 по плоской траектории с сохранением интеграла площадей. Вид, форма и свойства этой траектории зависят, конечно, от функции F, т. е. от законов действующих сил и, конечно, от начальных условий, которые также всегда будем считать заданными.

В классической ограниченной задаче траектория точки M_1 может быть, в зависимости от начальных условий, гиперболой, параболой, эллипсом, окружностью или даже прямой линией.

Но случаи, когда орбита точки M_1 является гиперболой, параболой или прямой линией, насколько нам известно, никогда не рассматривались, и в учебниках о них обычно не упоминается.

Поэтому в классической задаче рассматриваются только два случая, а именно, эллиптическая ограниченная задача и круговая ограниченная задача, причем последняя изучена более детально, чем первая, и полученные в ней результаты многократно применялись (и применяются в настоящее время) в конкретных астрономических задачах.

В общем случае, когда движение точки M_1 описывается уравнениями (5.7), вид траектории может быть самым разнообразным и орбита может быть замкнутой или незамкнутой, расположенной в конечной области пространства или имеющей бесконечные ветви и т. д.

Так как нас будет интересовать только движение точки M_2, то удобно принять за основную координатную плоскость (xOy) плоскость, в которой происходит движение точки M_1 и которая определяется начальным радиусом-вектором и начальным вектором скорости этой точки. Тогда уравнения (5.7) приведутся к системе двух уравнений второго порядка:

$$\ddot{x}_1 = -F\frac{x_1}{r_1}, \quad \ddot{y}_1 = -F\frac{y_1}{r_1}, \tag{5.7'}$$

а если мы перейдем теперь к полярным координатам, полагая

$$x_1 = r_1\cos v, \quad y_1 = r_1\sin v, \tag{5,7''}$$

то уравнения движения точки M_1 напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{r}_1 - \frac{c^2}{r_1^3} = -F(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1), \\ &r_1^2\dot{v} = c, \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

где c — произвольная постоянная (обычная постоянная площадей).

Из уравнений (5.8) можно непосредственно вывести только два случая, когда траектория точки M_1 будет заведомо известна. Это будут следующие случаи:

1-й случай, когда начальные условия таковы, что $c = 0$. Тогда из второго уравнения (5.8) имеем для всякого t

$$r_1^2\dot{v} = 0,$$

откуда или $r_1 \equiv 0$, или $\dot{v} = 0$. Но в первом случае точка M_1 совпадает с точкой M_0, и мы возвращаемся к задаче одного неподвижного центра. Если же $\dot{v} = 0$, то $v = v_0 = \mathrm{const}$ и траектория точки M_1 есть прямая, проходящая через начало координат M_0. Движение точки M_1 определяется тогда уравнением

$$\ddot{r}_1 = -F(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1),$$

и r_1 будет функцией t, $r_1^{(0)}$, $\dot{r}_1^{(0)}$.

2-й случай, когда начальные условия таковы, что $c \neq 0$, но функция F такова, что при некотором начальном значении $r_1^{(0)} = a$ мы имеем для всякого значения t

$$F(t;\ a,\ 0,\ 0) = \mathrm{const} > 0. \tag{5.8'}$$

В этом случае первое из уравнений (5.8) удовлетворяется тождественно при $r_1 = a$ и, следовательно, орбита точки M_1 есть окружность радиуса a с центром в точке M_0.

Второе из уравнений (5.8) показывает, что при этом

$$\dot{v} = \frac{c}{a^2} = n = \mathrm{const}, \tag{5.8''}$$

т. е. что точка M_1 движется в этом случае по окружности с постоянной угловой скоростью.

В таком случае мы будем называть нашу задачу *круговой ограниченной задачей.*

В первом случае задачу можно назвать *прямолинейной ограниченной задачей.*

Заметим еще, что круговая задача всегда будет возможна, если функция F не зависит от времени t и при всех или по крайней мере при некоторых значениях переменных сохраняет положительные значения.

В этом же случае (т. е. когда F не зависит от времени) и когда задача не является ни прямолинейной, ни круговой, радиус-вектор точки M_1, как было отмечено выше (§ 2 главы IV), может быть выражен в функции полярного угла v.

3. Займемся теперь рассмотрением уравнений (5.6). Предполагая, что за плоскость (xOy) взята плоскость движения точки M_1 и имея в виду, что в этом случае

$$x_1 = r_1 \cos v, \quad y_1 = r_1 \sin v, \quad z_1 = 0,$$

мы можем написать

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 (x_2 \cos v + y_2 \sin v)},$$

и уравнения (5.6) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} \cdot x_2 - m_1 F_{01} \cos v + \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} (r_1 \cos v - x_2), \\
\ddot{y}_2 &= -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} \cdot y_2 - m_1 F_{01} \sin v + \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} (r_1 \sin v - y_2), \\
\ddot{z}_2 &= -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} \cdot z_2 - \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} z_2,
\end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
F_{01} &= F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1), \\
F_{20} &= F_{20}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2), \\
F_{21} &= F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta}).
\end{aligned}\right\} \tag{5.9'}$$

В частности, если

$$F_{01} = \frac{f}{r_1^2}, \quad F_{20} = \frac{f}{r_2^2}, \quad F_{21} = \frac{f}{\Delta^2},$$

то уравнения (5.9) превращаются в классические уравнения ограниченной задачи с началом координат в точке M_0.

Из уравнений (5.9) видно также, что при произвольно заданных функциях (5.9′) третье из уравнений удовлетворяется при $z_2 \equiv 0$. Тогда задача сводится к рассмотрению двух первых уравнений (5.9), показывающих, что пассивная точка в этом случае движется в плоскости (xOy). Такая задача называется *плоской ограниченной задачей*, а в частных случаях, когда траектория точки M_1 есть прямая линия или окружность, — *плоской прямолинейной ограниченной задачей* и *плоской круговой ограниченной задачей*.

В классической ограниченной задаче, когда все законы действующих сил оказываются законами притяжения Ньютона, имеем соответственно случаи плоской гиперболической, параболической и эллиптической задачи.

Исследование уравнений движения в ограниченной задаче трех тел делается более удобным, если перейти от системы осей неизменного направления к вращающейся системе координат, совершенно так же, как это и производится всегда в классическом случае.

Итак, перейдем к системе прямоугольных координат, основная плоскость которой (xOy) совпадает с плоскостью движения точки M_1 и положительное направление оси абсцисс совпадает с направлением от M_0 к M_1.

Иначе говоря, преобразуем систему (5.9) подстановкой

$$x_2 = x\cos v - y\sin v, \quad y_2 = x\sin v + y\cos v, \quad z_2 = z, \tag{5.10}$$

вследствие чего получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2 x - \ddot{v}y &= X, \\ \ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2 y + \ddot{v}x &= Y, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

его правые части определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} X &= -m_0F_{20}\cdot\frac{x}{r} - m_1F_{21}\cdot\frac{x-r_1}{\Delta} - m_1F_{01}, \\ Y &= -m_0F_{20}\cdot\frac{y}{r} - m_1F_{21}\cdot\frac{y}{\Delta}, \\ Z &= -m_0F_{20}\cdot\frac{z}{r} - m_1F_{21}\cdot\frac{z}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.11'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \Delta &= \sqrt{r^2 - 2r_1x + r_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.11''}$$

Так как третье из уравнений (5.11′) удовлетворяется тождественно при $z = 0$, то рассматриваемая ограниченная задача допускает частное решение

$$z = 0,$$

и мы получим дифференциальные уравнения плоской ограниченной задачи

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2 x - \ddot{v}y &= X, \\ \ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2 y + \ddot{v}x &= Y, \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} = \rho, \\ \Delta &= \sqrt{r^2 - 2r_1x + r_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{5.12'}$$

а правые части определяются двумя первыми из формул (5.11′).

Если ввести теперь вместо прямоугольных координат во вращающейся системе ($Oxyz$) цилиндрические координаты, полагая

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{5.13}$$

то уравнения (5.11′) преобразуются к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - 2\dot{\upsilon}\dot{\varphi}\dot{\rho} - \rho(\dot{\varphi}^2 + \dot{\upsilon}^2) &= \mathrm{P}, \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}(\dot{\varphi} + \dot{\upsilon}) + \rho\ddot{\upsilon} &= \Phi, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P} &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi = \\ &= -\left(m_0F_{20} + m_1F_{21}\frac{\rho}{\Delta}\right)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \\ &\qquad + m_1\left(F_{21}\frac{r_1}{\Delta} - F_{01}\right)\cos\varphi, \\ \Phi &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi = \\ &= \left(m_0F_{20} - m_1F_{21}\frac{\rho}{\Delta}\right)(\cos\varphi - \sin\varphi) - \\ &\qquad - m_1\left(F_{21}\frac{r_1}{\Delta} - F_{01}\right)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.14′}$$

и

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{\rho^2 + z^2} = r, \\ \Delta &= \sqrt{r^2 - 2r_1r\cos\varphi + r_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.14″}$$

Заметим, что функция F_{20} не зависит от угла φ, а только от ρ, z и вообще от их производных первого и второго порядка. Функция F_{21} зависит от ρ, z, φ и их производных, а величина F_{01} есть известная функция времени.

4. В частном случае круговой ограниченной задачи, когда

$$r_1 = a = \text{const}, \quad \dot{r}_1 = \ddot{r}_1 = 0, \quad \dot{\upsilon} = n = \text{const}, \quad \ddot{\upsilon} = 0,$$

уравнения движения во вращающихся осях напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= X, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= Y, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

где правые части определяются теми же формулами (5.11′), в которых нужно только заменить r_1 на a, и где величина $F_{01} = F_{01}(t;\ 0,\ 0,\ 0)$ и в случае независимости сил, действующих на точки M_0 и M_1, есть просто некоторая постоянная.

Уравнения движения в цилиндрических координатах (5.14) также примут более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - 2n\dot{\varphi}\dot{\rho} - \rho(\dot{\varphi}^2 + n^2) &= \mathrm{P}, \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}(\dot{\varphi} + n) &= \Phi, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

где правые части также определяются прежними формулами (5.14′), в которых нужно положить $r_1 = a$ и $r_2 = \rho$,

$$\Delta = \sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi + a^2}.$$

Уравнения движения в плоской круговой ограниченной задаче получатся непосредственно из (5.15) и (5.16) отбрасыванием уравнений для $\ddot{z}$.

В другом простом частном случае — в прямолинейной ограниченной задаче будем иметь $\dot{v} = 0$, и уравнения (5.11) примут вид

$$\ddot{x} = X, \quad \ddot{y} = Y, \quad \ddot{z} = Z, \tag{5.17}$$

а уравнения (5.14) приводятся к виду

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = \mathrm{P}, \quad \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \Phi, \quad \ddot{z} = Z. \tag{5.18}$$

Формулы (5.11′) и (5.14′) не изменяются.

Уравнения плоской ограниченной задачи, когда точка M_2 движется в некоторой (произвольно выбранной) плоскости, проходящей через прямую (M_0M_1), мы опять получим отбрасыванием третьего уравнения из (5.17) или (5.18).

5. Возвратимся теперь к пространственной задаче во вращающихся осях и применим к уравнениям (5.11) преобразование к безразмерным («пульсирующим»!) переменным, наиболее часто называемое *преобразованием Нехвила*.

Это преобразование выполняется здесь совершенно таким же образом, как это мы показывали в предыдущем издании этой книги, а также во втором и третьем изданиях книги «Небесная механика. Основные задачи и методы». Поэтому мы не будем приводить здесь все необходимые промежуточные выкладки и приведем только окончательные результаты.

Преобразование Нехвила заключается в замене координат пассивной точки x, y, z новыми переменными посредством формул

$$x = r_1\xi, \quad y = r_1\eta, \quad z = r_1\zeta, \tag{5.19}$$

где радиус-вектор r_1 точки M_1 есть известная функция времени, и в замене независимой переменной t новой независимой переменной — полярным углом v — посредством интеграла площадей

$$c\,dt = r_1^2\,dv. \tag{5.19′}$$

Как нетрудно проверить непосредственно или при помощи указанных выше книг, преобразованные уравнения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dv^2}-2\frac{d\eta}{dv}&=\frac{r_1^3}{c^2}[F\cdot\xi+\Xi],\\ \frac{d^2\eta}{dv^2}+2\frac{d\xi}{dv}&=\frac{r_1^3}{c^2}[F\cdot\eta+\mathrm{H}],\\ \frac{d^2\zeta}{dv^2}+\zeta&=\frac{r_1^3}{c^2}[F\cdot\zeta+\mathrm{Z}].\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

Отметим, что так как t и v связаны дифференциальным соотношением (5.19′), где r_1 рассматривается как известная функция t, то всегда можно предполагать, что уравнение (5.19′) разрешено относительно t, которое подставлено затем в функцию r_1. Таким образом, мы будем предполагать, что в уравнениях (5.20) правые части являются функциями новой переменной v и где величины Ξ, H, Z определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}\Xi&=-m_0F_{20}\frac{\xi}{\bar\rho}-m_1F_{21}\frac{\xi-1}{\bar\Delta}-m_1F_{01},\\ \mathrm{H}&=-m_0F_{20}\frac{\eta}{\bar\rho}-m_1F_{21}\frac{\eta}{\bar\Delta},\\ \mathrm{Z}&=-m_0F_{20}\frac{\zeta}{\bar\rho}-m_1F_{21}\frac{\zeta}{\bar\Delta},\end{aligned}\right\}\tag{5.21}$$

где F дается формулой (5.5′), величины F_{01}, F_{20}, F_{21} — формулами (5.9′), а $\bar\rho$ и $\bar\Delta$ (которые можно считать безразмерными расстояниями) имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned}\bar\rho^2&=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,\\ \bar\Delta^2&=(\xi-1)^2+\eta^2+\zeta^2,\end{aligned}\right\}\tag{5.22}$$

так что истинные расстояния будут

$$r=r_1\bar\rho,\quad \Delta=r_1\bar\Delta.\tag{5.22′}$$

В величины (5.5′) и (5.9′) входят расстояния r_1, r и Δ, а также, вообще, их производные по времени t. Радиус-вектор r_1 точки M_1 есть, как уже было сказано, известная функция времени, так же как и ее производные $\dot r_1$ и $\ddot r_1$. Все эти три функции можно выразить через новую независимую переменную v.

Таким образом, F и F_{01} можно рассматривать как заданные функции от v (в частности, как заданные постоянные).

В величинах F_{20} и F_{21} расстояния r и Δ даются формулами (5.22′), но их производные по t нужно еще выразить через производные по новой переменной v. Это можно сделать следующим образом. Положим, как и раньше,

$$u = \frac{c}{r_1}, \tag{5.23}$$

так что u есть известная функция v, так же как и ее производные u' и u'' (производные по v обозначаем для краткости штрихами).

Тогда мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}_1 &= -u', & \ddot{r}_1 &= -\frac{1}{c}u^2u'', \\ \dot{r} &= u\bar{\rho}' - \bar{\rho}u', & \ddot{r} &= \frac{1}{c}u^2(u\bar{\rho}'' - \bar{\rho}u''), \\ \dot{\Delta} &= u\bar{\Delta}' - \bar{\Delta}u', & \ddot{\Delta} &= \frac{1}{c}u^2(u\bar{\Delta}'' - \bar{\Delta}u''). \end{aligned}\right\} \tag{5.23'}$$

Наконец, производные от $\bar{\rho}$ и $\bar{\Delta}$ выражаются через пульсирующие координаты и их производные по v посредством формул

$$\left.\begin{aligned} \bar{\rho}\bar{\rho}' &= \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta', \\ \bar{\Delta}\bar{\Delta}' &= (\xi - 1)\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \bar{\rho}\bar{\rho}' - \xi', \\ \bar{\rho}\bar{\rho}'' &= \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \rho'^2, \\ \bar{\Delta}\bar{\Delta}'' &= \bar{\rho}\bar{\rho}'' + \bar{\rho}'^2 - \bar{\Delta}'^2 - \xi''. \end{aligned}\right\} \tag{5.23''}$$

Уравнения (5.20) определяют движение пассивно действующей точки M_2 (обладающей конечной массой m_2) в переменных Нехвила и при произвольно заданных законах действующих сил являются уравнениями весьма сложного вида, причем вообще даже нелинейными относительно вторых и первых производных от координат.

Только при законах сил типа (4.18), когда функции F_{20} и F_{21} линейны относительно $\ddot{r}$ и $\ddot{\Delta}$ соответственно, правые части уравнений (5.20) в силу (5.23') и (5.23'') окажутся линейными относительно $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\zeta}$ и могут быть легко разрешены относительно этих величин. Следует заметить при этом, что функции F_{01} и F_{10} не обязательно должны обладать свойством линейности относительно $\ddot{r}_1$, так как определение функции r_1 составляет независимую задачу, определяемую уравнениями (5.8).

Примером случая, в котором уравнения (5.20) могут быть разрешены относительно вторых производных, является тот случай, в котором функции F_{20} и F_{21} даются законом Вебера вида (4.5).

В случае, когда F_{20} и F_{21} не зависят от производных, правые части уравнений (5.20) зависят только от координат и поэтому значительно упрощаются. Таков, например, случай, когда

$$F_{20} = f_{20} \cdot r^{k_0}, \quad F_{21} = f_{21} \cdot \Delta^{k_1}, \tag{5.24}$$

где k_0 *и* k_1 — какие угодно вещественные числа, а f_{20} и f_{21} — или вещественные постоянные, или вещественные функции времени, а значит, и угла v.

Классический случай ограниченной задачи мы получим также как частный случай общей задачи, в котором законы F_{20} и F_{21} определяются формулами (5.24) с

$$k_0 = k_1 = -2, \quad f_{20} = f_{21} = f = \text{const},$$

и, кроме того,

$$F_{10} = F_{01} = \frac{f}{r_1^2},$$

откуда, следовательно, полагая $\mu = f(m_0 + m_1)$, имеем

$$F = m_0 F_{10} + m_1 F_{01} = \frac{\mu}{r_1^2}.$$

Далее, используя формулы (5.22′), имеем

$$F_{20} = \frac{f}{r_1^2 \bar{\rho}^2}, \quad F_{21} = \frac{f}{r_1^2 \bar{\Delta}^2},$$

после чего из (5.20) и (5.21) находим уравнения классической ограниченной задачи в переменных Нехвила

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \bar{r}_1 \left[\xi - \frac{\bar{m}_0 \xi}{\bar{\rho}^3} - \frac{\bar{m}_1 (\xi - 1)}{\bar{\Delta}^3} - \bar{m}_1\right], \\ \eta'' + 2\xi &= \bar{r}_1 \eta \left[1 - \frac{\bar{m}_0}{\bar{\rho}^3} - \frac{\bar{m}_1}{\bar{\Delta}^3}\right], \\ \zeta'' + \zeta &= \bar{r}_1 \zeta \left[1 - \frac{\bar{m}_0}{\bar{\rho}^3} - \frac{\bar{m}_1}{\bar{\Delta}^3}\right], \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

где

$$\bar{m}_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \tag{5.25′}$$

$$\bar{m}_0 + \bar{m}_1 = 1,$$

и

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos v} \tag{5.26}$$

есть обычное уравнение кеплеровской орбиты точки M_1 с фокусом в M_0, причем p есть параметр орбиты и e — ее эксцентриситет. Наконец,

$$\bar{r}_1 = \frac{r_1}{p} = \frac{1}{1 + e\cos v}, \tag{5.26′}$$

Независимой переменной в уравнениях (5.25) является истинная аномалия точки M_1 в ее орбите (5.26).

Если $e = 0$, то

$$\bar{r}_1 = 1, \quad r_1 = a, \quad v = nt,$$

и (5.25) обращаются в уравнения классической круговой ограниченной задачи.

Заметим еще, что, вводя в рассмотрение функцию сил Ω формулой

$$\Omega = \bar{r}_1 \left[\frac{1}{2} \bar{\rho}^2 + \frac{\bar{m}_0}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{m}_1}{\bar{\Delta}} - m_1 \xi \right], \tag{5.27}$$

мы можем переписать уравнения (5.25) более кратко в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + \zeta &= \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right\} \tag{5.28}$$

§ 2. Интеграл Якоби. Частные решения ограниченной задачи

1. Уравнения общей ограниченной задачи трех тел (материальных точек) (5.11), (5.14) или (5.20) при произвольно заданных законах действующих сил не допускают никакого простого алгебраического или даже выражаемого в квадратурах элементарных функций, первого интеграла.

Даже классическая ограниченная задача, когда все действующие силы являются силами притяжения (или отталкивания), обратно пропорциональными квадрату соответствующего расстояния, в некруговом варианте не имеет никакого первого интеграла.

Только круговая ограниченная задача в классической небесной механике допускает первый интеграл — знаменитый интеграл Якоби, который имеет разнообразные приложения, из которого выводятся разнообразные интересные и полезные результаты и которому с давних пор посвящено множество исследований астрономов и математиков во всех частях земного шара.

Покажем теперь, что общая круговая, ограниченная задача также может обладать в некоторых случаях первым интегралом, аналогичным классическому, и который мы будем продолжать называть *интегралом Якоби.*

В самом деле, производя традиционную операцию, т. е. умножая уравнения круговой задачи (5.15) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и складывая, мы получим

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} - 2n^2 (x\dot{x} + y\dot{y}) = 2\dot{x}X + 2\dot{y}Y + 2\dot{z}Z,$$

причем X, Y, Z определяются формулами (5.11′), где $r_1 = a$ и $F_{01} = \text{const}$.

Левая часть есть, очевидно, полная производная по t и, следовательно, мы получим из последнего уравнения первый интеграл только в том случае, когда правая его часть также окажется полной производной по t. Но из формул (5.11′) мы выводим, имея в виду (5.11″),

$$X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}=-m_0F_{20}\dot{r}-m_1F_{21}\dot{\Delta}-m_1F_{01}\dot{x}.$$

Последнее выражение может быть полной производной только в том случае, когда каждая из двух функций $F_{20}(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r})$ и $F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})$ такова, что для нее выполняется условие (4.20), т. е. когда существуют такие две новые функции, что мы имеем

$$\left.\begin{aligned} -\dot{r}F_{20}(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r})&=\frac{d}{dt}\Phi_{20}(t;\ r,\ \dot{r}),\\ -\dot{\Delta}F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})&=\frac{d}{dt}\Phi_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta}).\end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

В этом случае соотношение, полученное комбинацией уравнений движения (5.15), может быть проинтегрировано по t, и мы получим интеграл Якоби в следующем виде:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=n^2(x^2+y^2)+2\Phi+2h, \tag{5.30}$$

где h — произвольная постоянная (постоянная Якоби) и функция Φ, играющая роль функции сил, выражается следующей формулой:

$$\Phi=m_0\Phi_{20}(t;\ r,\ \dot{r})+m_1\Phi_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta})-m_1F_{01}\cdot x. \tag{5.31}$$

Таким образом, функция Φ зависит явно от времени t и через посредство r, Δ, $\dot{r}$, $\dot{\Delta}$ от x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Примером задачи, в которой существует интеграл Якоби, может служить случай, когда законы сил определяются формулами Вебера, т. е. когда

$$F_{20}=\frac{f_{20}}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma_{20}^2}+\frac{2r\ddot{r}}{\sigma_{20}^2}\right),$$

$$F_{21}=\frac{f_{21}}{\Delta^2}\left(1-\frac{\dot{\Delta}^2}{\sigma_{21}^2}+\frac{2\Delta\ddot{\Delta}}{\sigma_{21}^2}\right),$$

где f_{20}, f_{21}, σ_{20}, σ_{21} — постоянные.

В этом случае, как мы уже показали в главе IV, будем иметь

$$\Phi_{20}=\frac{f_{20}}{r}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma_{20}^2}\right),$$

$$\Phi_{21}=\frac{f_{21}}{\Delta}\left(1-\frac{\dot{\Delta}^2}{\sigma_{21}^2}\right),$$

так что интеграл Якоби (5.30) приведется к следующей форме:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+m_1F_{01}\cdot x=$$
$$=\frac{m_0f_{20}}{r}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma_{20}^2}\right)+\frac{m_1f_{21}}{\Delta}\left(1-\frac{\dot{\Delta}^2}{\sigma_{21}^2}\right)+h.$$

Другим примером может служить случай, когда законы сил зависят только от расстояний, так что

$$F_{20}=f_{20}\cdot F_{20}(r),\quad F_{21}=f_{21}\cdot F_{21}(\Delta).$$

В этом случае

$$\Phi_{20}(r)=-f_{20}\int F_{20}(r)\,dr,\quad \Phi_{21}(\Delta)=-f_{21}\int F_{21}(\Delta)\,d\Delta,$$

и интеграл Якоби будет иметь вид

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+m_1F_{01}\cdot x=$$
$$=m_0\Phi_{20}(r)+m_1\Phi_{21}(\Delta)+h.$$

Из того и из другого примера в частных случаях получим классический интеграл Якоби в круговой ограниченной задаче трех тел.

Из первого примера мы получим классический интеграл, полагая

$$f_{20}=f_{21}=f,\quad \sigma_{20}=\sigma_{21}=\infty,$$

а из второго — в случае, когда

$$F_{20}=\frac{f}{r^2},\quad F_{21}=\frac{f}{\Delta^2},$$

так что для случая классической ограниченной задачи имеем:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+m_1\cdot F_{01}\cdot x=f\left(\frac{m_0}{r}+\frac{m_1}{\Delta}\right)+h.$$

В плоской круговой ограниченной задаче, когда для всякого значения t имеем $z=\dot{z}=0$, мы можем записать этот интеграл в виде

$$V^2=n^2r^2+2U-\frac{fn^2m_1}{a}(a^2-\Delta^2-r^2),$$

где V — скорость движущейся точки M_2, а U есть силовая функция:

$$U=f\left(\frac{m_0}{r}+\frac{m_1}{\Delta}\right).$$

Впрочем, в пространственной круговой задаче интеграл Якоби также можно привести к подобному же виду, заменяя только в последнем равенстве n^2r^2 на $n^2(r^2-z^2)$.

Интеграл Якоби можно, конечно, получить и из уравнений в переменных Нехвила, но только в случае круговой задачи, когда $r_1 = a = \mathrm{const}$.

Классический интеграл Якоби получится также из уравнений (5.28) для круговой задачи в виде ($\bar{r}_1 = \mathrm{const}$)

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \zeta^2 = 2\Omega + 2h.$$

Примечание. В общем случае, когда для круговой задачи интеграл Якоби имеет вид (5.30), функция Φ, как показывает формула (5.31), может содержать явно время t. Это обстоятельство может показаться необычным, однако можно привести множество примеров, хотя бы и формально математических, когда мы действительно встретимся с такого рода случаем. В самом деле, пусть, например,

$$F_{20} = f\,[\dot{\varphi}(t)\cdot \dot{r} + 2\varphi(t)\cdot \ddot{r}],$$

где f — постоянная, а $\varphi(t)$ — какая угодно функция от t (непрерывная и дифференцируемая). Тогда, как легко видеть, мы имеем

$$\Phi_{20} = -f\varphi(t)\,\dot{r}^2.$$

Более общий случай подобного рода мы получим, предполагая, что какая-либо из функций F_{20}, F_{21} (или обе) имеет форму (4.18), не зависит от переменной r и удовлетворяет условию (4.20).

2. Перейдем теперь к рассмотрению частных решений общей ограниченной задачи, что удобнее сделать, исходя из уравнений движения (5.20) в пульсирующих координатах Нехвила. Будем искать установившиеся (стационарные, — в другой терминологии) движения, которым соответствуют постоянные значения переменных Нехвила ξ, η, ζ.

Из уравнений (5.20) непосредственно видно, что при любых постоянных значениях ξ и η левые части двух первых уравнений обращаются в нуль, а третье уравнение полностью удовлетворяется при $\zeta = 0$. Поэтому уравнения (5.20) будут допускать установившиеся решения, соответствующие точкам, лежащим в плоскости $(O\xi\eta)$, если найдутся такие постоянные ξ_0 и η_0, которые обращают в тождественные нули выражения, находящиеся в скобках в правых частях первых двух уравнений, в которых нужно положить предварительно $\zeta = 0$.

Имея в виду значение функции F и формулы (5.21), выпишем полные выражения для упомянутых двух скобок, что дает

$$\left.\begin{aligned} F\xi + \Xi &= (m_0F_{10} + m_1F_{01})\,\xi - \frac{n_0\xi}{\bar{\rho}}F_{20} - \frac{m_1(\xi - 1)}{\bar{\Delta}}F_{21} - m_1F_{01},\\ F\eta + \mathrm{H} &= (m_0F_{10} + m_1F_{01})\,\eta - \frac{m_0\eta}{\bar{\rho}}F_{20} - \frac{m_1\eta}{\bar{\Delta}}F_{21}, \end{aligned}\right\}\quad(5.32)$$

где теперь (так как $\zeta = 0$)

$$\left.\begin{aligned}\bar{\rho}^2 &= \xi^2 + \eta^2,\\ \bar{\Delta}^2 &= (\xi - 1)^2 + \eta^2.\end{aligned}\right\} \qquad (5.33)$$

Поэтому для определения постоянных ξ_0 и η_0, удовлетворяющих уравнениям (5.32), мы будем иметь следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(t;\ \xi,\ \eta) &= F\cdot\xi + \Xi = 0,\\ \Psi(t;\ \xi,\ \eta) &= F\cdot\eta + \mathrm{H} = 0.\end{aligned}\right\}. \qquad (5.34)$$

В уравнения (5.34) не будут входить производные от координат Нехвила, равно как и от величин $\bar{\rho}$, $\bar{\Delta}$, так как при постоянных значениях ξ, η, ζ величины $\bar{\rho}$ и $\bar{\Delta}$ также будут некоторыми постоянными, а поэтому все производные от перечисленных величин будут равны нулю.

Однако время t входит явно в уравнения (5.34) посредством функции r_1, которая вообще есть функция времени.

Несмотря на это, уравнения (5.34) могут иметь, при выполнении некоторых дополнительных условий, решения, в которых ξ и η имеют постоянные значения.

Если такие решения существуют, то каждое из них определяет на плоскости ($\xi O\eta$) некоторую постоянную точку, каждую из которых можем назвать, по установившейся традиции, *точкой либрации.*

Известно, что в плоской, круговой классической задаче мы знаем пять точек либрации, три из которых лежат на прямой, проходящей через точки M_0 и M_1, а две остальные являются вершинами равностороннего треугольника, основанием которого служит отрезок $\overline{M_0M_1}$.

В неклассической задаче, которую мы здесь рассматриваем, также могут существовать аналогичные решения, что мы сейчас и покажем. Рассмотрим сначала случай, в котором существуют решения, соответствующие вершинам равностороннего треугольника. Допустим, что такие решения существуют. Тогда уравнения (5.34) должны удовлетворяться тождественно при

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad (L)$$

будем иметь

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\Delta}_0 = 1,$$

откуда из (5.22) следует также, что в этом случае

$$r = \Delta = r_1,$$

т. е. треугольник $(M_0M_1M_2)$ действительно окажется равносторонним. Та его вершина, которая находится в положительной части плоскости, имеет координаты $\xi_0 = \frac{1}{2}$, $\eta_0 = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, и мы будем обозначать ее (так и в классической задаче) (L_4), а противоположную ей точку с координатами $\xi_0 = -\frac{1}{2}$, $\eta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ обозначим (L_5). Соответствующие решения системы (5.20) будем называть *лагранжевыми решениями* (или *треугольными*).

Эти лагранжевы решения существуют, как это можно видеть из формул (5.32), только при выполнении следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1) &= F_{20}(t;\ r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), \\ F_{01}(t;\ r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1) &= F_{21}(t;\ r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1). \end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

Эти условия показывают, что точка M_0 действует на точки M_1 и M_2 по одному и тому же закону и что точка M_1 также действует на точки M_0 и M_2 тоже по одному закону, вообще отличному от предыдущего.

Условия (5.35) являются необходимыми и достаточными для существования лагранжевых решений и выполняются, например, всегда, если в рассматриваемой механической системе царствует один единственный закон, т. е. если

$$F_{01} = F_{10} = F_{20} = F_{21} = F,$$

в частности, если

$$F = F(r_1),$$

причем активные массы m_0 и m_1 совершенно произвольны.

Если условие (5.35) не выполняется, то уравнения (5.25) не допускают лагранжева решения в форме равностороннего треугольника, но это не значит, что не существуют решения другого типа.

Например, если $m_0 = m_1$, то при выполнении условий

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1) &= F_{01}(t;\ r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), \\ F_{20}(t;\ r, \dot{r}, \ddot{r}) &= F_{21}(t;\ r, \dot{r}, \ddot{r}) \end{aligned}\right\} \tag{5.35$'$}$$

существует решение в форме равнобедренного треугольника с основанием (M_0M_1) и с вершинами в точках с координатами

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta = \pm\eta_0, \tag{L'}$$

причем η_0 остается совершенно произвольной, равной высоте равнобедренного треугольника, а боковые стороны одинаковы, так как из (5.33) следует, что

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\Delta}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\bar{\eta}_0^2},$$

а значит,

$$r = \Delta = \bar{\rho}_0 \cdot r_1.$$

Действительно, легко проверить, что при перечисленных условиях уравнения (5.25) удовлетворяются тождественно при

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = \eta_0, \quad \zeta = 0.$$

Заметим, что если все законы действующих сил одинаковы, то уравнения (5.25) допускают и решение (L), и решение (L'). В последнем случае будем обозначать вершины равнобедренного треугольника символами (L_4') и (L_5') соответственно.

Решение в форме равностороннего треугольника, в случае равенства активных масс, было известно в классической небесной механике давно. Мы видим теперь, что такое решение может существовать и при других законах действующих сил, лишь бы выполнялось условие (5.33′).

Если в случае равных масс взять $\eta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, то мы получим равносторонний треугольник, т. е. лагранжево решение. Но тогда будем иметь

$$\bar{\rho} = \bar{\Delta} = 1$$

и

$$r = \Delta = r_1.$$

Поэтому, если выполняются условия (5.35′), то будут также, что нетрудно проверить, выполнены и условия (5.35).

Если теперь перейти обратно от координат Нехвила к координатам x, y, z во вращающейся системе координат, то мы получим лагранжево решение системы (5.11) в виде

$$x = \frac{1}{2} r_1, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_1, \quad z = 0,$$

а переходя к первоначальным координатам с началом в M_0 и с неизменными направлениями осей, мы найдем лагранжево решение уравнений (5.9), которое, имея в виду, что

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ,$$

напишем следующим образом:

$$x_2 = r_1 \cos(v \pm 60^\circ), \quad y_2 = r_1 \sin(v \pm 60^\circ), \quad z_2 = 0,$$

причем знак «+» соответствует решению (L_4), а знак «—» — решению (L_5). Последние формулы показывают, что в лагранжевом решении точка M_2 описывает в плоскости (xOy) орбиту, подобную орбите точки M_1, причем в решении (L_4) точка M_2 опережает точку M_1 на 60°, а в решении (L_5) — отстает от M_1 на 60°. Треугольник $(M_0M_1M_2)$, непрерывно изменяясь, всегда остается равносторонним.

В круговой задаче $r_1 = a$ и $\dot{v} = n$, а следовательно, в круговой задаче точки M_1 и M_2 будут двигаться по одной и той же окружности с постоянной угловой скоростью.

В случае равнобедренного треугольника решение первоначальных уравнений (5.9) запишется в виде

$$x_2 = \frac{1}{2} r_1 (\cos v - 2\eta_0 \sin v), \quad y_2 = \frac{1}{2} r_1 (\sin v + 2\eta_0 \cos v), \quad z_2 = 0,$$

$$r_2 = \Delta = \frac{1}{2} r_1 \sqrt{1 + 4\eta_0^2}.$$

3. Равенства (5.32) показывают, что уравнения (5.20) будут также удовлетворены при

$$\xi = \xi_0 = \mathrm{const}, \quad \eta = \eta_0 = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = 0, \tag{E}$$

причем ξ_0 должна быть корнем уравнения

$$\Phi(t; \xi, 0) = 0 \tag{5.36}$$

при любом значении t.

Если такое решение существует, то точка M_2 всегда будет находиться на прямой (M_0M_1), образуя вместе с точками M_0 и M_1 неизменную конфигурацию. Такое решение мы будем называть *эйлеровым решением* (или *прямолинейным* решением).

В таком решении точка M_2 может находиться или слева от M_0, и мы будем обозначать ее в этом случае (L_1), или между M_0 и M_1 и тогда мы будем обозначать ее (L_2), или, наконец, точка M_2 может находиться справа от точки M_1 и мы будем обозначать ее тогда (L_3).

Каждый из этих трех возможных случаев удобнее рассматривать по отдельности, причем каждый раз задача будет заключаться сначала в доказательстве существования (или несуществования) корня уравнения (5.36), а затем в нахождении этого корня, что, вообще говоря, приходится выполнять методами приближенного анализа.

Вопрос о существовании корня уравнения (5.36) зависит от структуры законов действующих сил и в самом общем случае разрешен быть не может. Поэтому остается рассматривать различные частные случаи, представляющие механический или математический интерес.

Простейшим случаем задачи будет тот, в котором все действующие силы определяются законом Гука, так что имеем

$$F_{10} = f_{10} \cdot r_1, \quad F_{01} = f_{01} \cdot r_1, \quad F_{20} = f_{20} \cdot r, \quad F_{21} = f_{21} \cdot \Delta,$$

где все множители f_{ij} — вещественные постоянные или представляют каждый произведение одной и той же функции времени на постоянные. Уравнение (5.36) после сокращения общего множителя, зависящего от t или постоянного, приведется к виду

$$[m_0(f_{10}-f_{20})+m_1(f_{01}-f_{21})]\cdot\xi=f_{01}-f_{21}, \tag{5.36'}$$

откуда видно, что наша задача в этом случае может иметь только одну точку либрации (если $f_{10}\neq f_{20}$) или же будет иметь бесчисленное множество таких точек (все точки оси $O\xi$), если $f_{10}=f_{20}$ и $f_{01}=f_{21}$, что имеет место, например, если все множители f_{ij} одинаковы.

Другим простым и наиболее интересным случаем будет тот, в котором все действующие силы определяются законом, выражающимся одной и той же степенью соответствующего расстояния с одним и тем же множителем пропорциональности, т. е. когда имеем

$$F_{10}=f\cdot r_1^{k+1}=F_{01},\quad F_{20}=f\cdot r^{k+1},\quad F_{21}=f\cdot\Delta^{k+1}, \tag{5.37}$$

где k — какое-либо вещественное число (положительное или отрицательное), а f — вещественная постоянная или вещественная функция времени (непрерывная и однозначная).

Тогда уравнение (5.36) после сокращения на $f\cdot r_1^{k+1}$ приведется к виду

$$\Phi(\xi)=\xi-(1-\mu)\xi\bar{\rho}^k-\mu(\xi-1)\bar{\Delta}^k-\mu=0, \tag{5.38}$$

где $\mu=m_1$, а за единицу массы принята сумма масс обеих точек, так что $m_0+m_1=1$ и $m_0=1-\mu$.

Для исследования этого уравнения примем за искомую величину расстояние предполагаемой точки либрации от начала координат, т. е. от точки M_0, которое обозначим для упрощения буквой x и рассмотрим прежде случай, когда показатель степени в (5.37) $k>0$ (случай $k=0$ соответствует закону Гука и был уже рассмотрен).

Если существует точка либрации (L_1), то $\xi=-x$, $\bar{\rho}=x\geqslant 0$ и $\bar{\Delta}=1+x$. Уравнение (5.38) для этого случая примет вид

$$\Phi_1(x,\mu)=-x+(1-\mu)x^{k+1}+\mu(1+x)^{k+1}-\mu=0, \tag{5.39}$$

в точке (L_1) будет соответствовать неотрицательный вещественный корень этого уравнения.

Сразу видно, что $\Phi(0,\mu)=0$, так что одна точка либрации типа (L_1) заведомо существует при всяком положительном k и всегда совпадает с точкой M_0.

Чтобы выяснить вопрос о существовании других точек типа (L_1), отличных от M_0, составим производную по x:

$$\Phi_1'(x,\mu)=-1+(k+1)(1-\mu)x^k+\mu(k+1)(1+x)^k. \tag{5.39'}$$

Отсюда и из (5.39) находим

$$\begin{aligned} &\Phi_1'(0, \mu) > 0 \quad \text{при} \quad (k+1)\mu > 1, \\ &\Phi_1'(0, \mu) < 0 \quad \text{при} \quad (k+1)\mu < 1, \\ &\Phi_1(1, \mu) = 2\mu(2^k - 1) > 0, \\ &\Phi_1'(1, \mu) = (k+1)\mu(2^k - 1) + k > 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что при $\mu(k+1) > 1$ либо нет отличного от нуля корня в промежутке $(0, 1)$, либо найдется четное число таких корней, а если $\mu(k+1) < 1$, то обязательно существует по крайней мере один корень в промежутке $(0, 1)$ или даже нечетное число таких корней. При $x > 1$ производная $\Phi_1'(x, \mu)$ всегда положительна, а поэтому на промежутке $(1, \infty)$ функция $\Phi_1(x, \mu)$ не имеет корней.

Таким образом, на отрезке $(-1, 0)$ оси абсцисс либо вовсе нет других точек либрации (L_1) $(\mu(k+1) > 1)$, либо существует нечетное число таких точек $(\mu(k+1) < 1)$, одна или несколько. На остальной части отрицательной оси абсцисс точек либрации не имеется.

Например, пусть $k = 1$. Тогда уравнение (5.39) — квадратное и имеет два вещественных корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1 - 2\mu$, т. е. существует вторая точка (L_1), расстояние которой от M_0 равно $\bar{\rho} = 1 - 2\mu < 1$ и которая лежит левее точки M_0.

Переходим к вопросу о существовании точки либрации типа (L_2), т. е. находящейся между точками M_0 и (M_1). В этом случае $\xi = \bar{\rho} = x$, $\bar{\Delta} = 1 - x$ и уравнение (5.38) приводится к виду

$$\Phi_2(x, \mu) = x - (1-\mu)x^{k+1} + \mu(1-x)^{k+1} - \mu = 0. \qquad (5.40)$$

Так как непосредственно видно, что $\Phi_2(0, \mu) = \Phi_1(1, \mu) = 0$, то мы всегда имеем две точки либрации типа (L_2), одна из которых совпадает с точкой M_0 и другая — с M_1.

Посмотрим, нет ли других точек (L_2) в промежутке $(0, 1)$, отличных от M_0 и M_1. Составляя опять производную по переменной x, имеем

$$\Phi_2'(x, \mu) = 1 - (k+1)(1-\mu)x^k - \mu(k+1)(1-x)^k. \qquad (5.40')$$

Отсюда находим, что при $(k+1)\mu < 1$

$$\Phi_2'(0, \mu) > 0, \quad \Phi_2'(1, \mu) < 0,$$

и при $k > (k+1)\mu > 1$

$$\Phi_2'(0, \mu) < 0, \quad \Phi_2'(1, \mu) < 0.$$

Так как

$$\Phi_2\left(\frac{1}{2},\ \mu\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-2\mu}{2^k}\right)>0,$$

то в первом случае $((k+1)\mu<1)$ функция Φ_2 либо не имеет корней в промежутке $(0, 1)$, либо имеет четное число корней, а во втором случае $(k>(k+1)\mu>1)$ функция Φ_2 обязательно имеет по крайней мере один корень (или нечетное число корней). Примерами могут служить случаи $k=1$ и $k=2$. В первом случае уравнение (5.40) имеет только два корня, $x_1=0$ и $x_2=0$, а поэтому никаких других точек либрации между M_0 и M_1 нет. Во втором случае уравнение (5.40) — кубичное и имеет три вещественных корня $x_1=0$, $x_2=3\mu-1$, $x_3=1$. Таким образом, если $\frac{1}{3}<\mu<\frac{2}{3}$, то корень x_2 положителен и лежит в промежутке $(0, 1)$, соответствуя точке либрации (L_2), находящейся между M_0 и M_1. Если же $3\mu<1$, то корень x_2 отрицателен и точки либрации (L_2) между M_0 и M_1 опять нет.

Остается рассмотреть вопрос о существовании точки либрации (L_3), которая должна лежать справа от точки M_1.

В этом случае $\xi=\bar\rho=x>1$, $\bar\Delta=x-1$ и уравнение (5.38) будет иметь вид

$$\Phi_3(x,\ \mu)=x-(1-\mu)x^{k+1}-\mu(x-1)^{k+1}-\mu=0. \qquad (5.41)$$

Так как $\Phi_3(1,\ \mu)\equiv 0$, то одна точка (L_3) во всяком случае существует, совпадая с точкой M_1.

Составим снова производную по τ. Мы имеем:

$$\Phi_3'(x,\ \mu)=1-(k+1)(1-\mu)x^k-(k+1)\mu(x-1)^k. \qquad (5.41')$$

Отсюда при $(k+1)(1-\mu)<1$

$$\Phi_3'(1,\ \mu)>0, \quad \Phi_3'(2,\ \mu)<0,$$

а при $(k+1)(1-\mu)>0$

$$\Phi_3'(1,\ \mu)<0, \quad \Phi_3'(2,\ \mu)<0;$$

так как

$$\Phi_3(2,\ \mu)=1-(k+1)[\mu+(1-\mu)\cdot 2^k]<0,$$

то в первом случае функция Φ_3 имеет в промежутке $(1, 2)$ по крайней мере один корень (или нечетное число корней), а во втором случае функция Φ_3 либо не имеет корней в том же промежутке, либо имеет нечетное число корней. Примером опять может служить хотя бы тот же случай, когда $k=1$. В этом случае уравнение (5.41) имеет два вещественных корня

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2\mu < 1$$

и точка (L_3) (справа от M_1) не существует.

Из (5.41) следует, что на промежутке $(2, \infty)$ функция $\Phi_3(x, \mu)$ не имеет корней, т. е. на части оси абсцисс при $x > 2$ точек либрации (L_3) больше нет.

Фактическое определение корней функции $\Phi(x, \mu)$ в любом из указанных случаев представляет весьма трудную математическую задачу, так как приводит к уравнению высокой степени или даже к иррациональному и трансцендентному уравнению, потому что показатель степени k в (5.37) может быть вообще и иррациональным и трансцендентным числом.

В случае законов сил более сложного вида задача делается еще более трудной. Поэтому мы ограничимся здесь только разобранными примерами.

4. Рассмотрим в заключение наиболее важный для приложений в небесной механике случай, когда показатель k в законах (5.37) есть число отрицательное. Пусть $k = -N$, где $N > 0$. Освобождаясь в (5.38) от знаменателей, мы приведем нашу задачу к рассмотрению следующего уравнения:

$$R(\xi, \mu) = \xi\bar{\rho}^N\bar{\Delta}^N - (1-\mu)\xi\bar{\Delta}^N - \mu(\xi - 1)\bar{\rho}^N - \mu\bar{\rho}^N\bar{\Delta}^N = 0, \quad (5.42)$$

где, так же как и выше, будем считать неизвестной величиной расстояние $\bar{\rho}$, которое всегда есть величина положительная и которую опять будем обозначать буквой x.

Теперь, так же как и в предыдущем разделе, будем поочередно рассматривать три случая.

Допустим, что имеется точка либрации (L_1) слева от точки M_0. Тогда $-\xi = \bar{\rho} = x$, $\bar{\Delta} = 1 + x$, и уравнение (5.42), после сокращения общего множителя, можно написать в виде

$$R_1(x, \mu) = x^N(1+x)^{N-1} - (1-\mu)(1+x)^{N-1} - \mu x^{N-1} + \\ + \mu x^{N-1}(1+x)^{N-1} = 0. \quad (5.43)$$

Вычисляем теперь значения функции R_1 на концах промежутка $(0, 1)$. Мы имеем:

$$R_1(0, \mu) = -(1-\mu) < 0, \quad R_1(1, \mu) = \mu(2^N - 1) > 0,$$

откуда следует (по свойствам непрерывности), что в промежутке $(0, 1)$ функция $R_1(x, \mu)$ имеет по крайней мере один корень. Если этих корней найдется несколько, то их число заведомо нечетное. Таким образом, на отрезке оси абсцисс $(-1, 0)$ существует точка либрации (L_1) (или, может быть, нечетное число этих точек). Но при $\mu = 0$ уравнение (5.43) имеет единственный вещественный корень $x_1 = 1$. Дифференцируя

(5.43) по x, находим

$$\frac{\partial R_1(x, \mu)}{\partial x} = R_1'(x, \mu) = x^{N-1}(1+x)^{N-1} - \\ -(1-\mu)(1+Nx)(1+x)^{N-1} - \mu x[(1-N)x - N], \quad (5.43')$$

откуда

$$R_1'(1, 0) = -N2^{N-1} \neq 0.$$

По теореме о неявных функциях отсюда заключаем, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, уравнение (5.43) имеет единственный корень, стремящийся к 1 при $\mu \to 0$.

Если N есть целое число, не равное 1, то функция $R_1(x, \mu)$ разложима по степеням x и указанный корень есть функция от μ, разложимая в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по степеням μ. Вычисляя первые члены этого ряда, мы найдем

$$x(\mu) = 1 - \frac{4\mu}{3N-2}\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) + \ldots \quad (5.43'')$$

Таким образом, при μ, достаточно малом, на отрезке $(-1, 0)$ оси абсцисс существует единственная точка либрации (L_1), приближающаяся к точке -1, когда $\mu \to 0$.

Если N не есть целое число, то условия теоремы существования не выполняются и теорема непосредственно не применима.

Однако ряд (5.43″) можно составить при любом положительном $N \neq 1$, но мы не можем утверждать без дополнительного исследования, что этот ряд всегда будет абсолютно сходящимся. Случай $N = 1$ вообще исключается из рассмотрения, так как тогда $k + 1 = 0$ и задача не имеет смысла.

Переходим к вопросу о существовании точки (L_2). Если такая точка существует, то $\xi = \bar{\rho} = x$, $\bar{\Delta} = 1 - x = y$ и уравнение (5.42) может быть приведено к следующему виду:

$$R_2(y; \mu) = y^{N-1}(1-y)^N - (1-\mu)y^{N-1} + \\ + \mu(1-y)^{N-1} - \mu y^{N-1}(1-y)^{N-1} = 0$$

или к виду

$$R_2(y, \mu) = y^{N-1}[(1-y)^N - 1] + \\ + \mu\left[y^{N-1} + (1-y)^{N-1} - y^{N-1}(1-y)^{N-1}\right] = 0. \quad (5.44)$$

Таким образом, в рассматриваемом теперь случае за искомую величину взято расстояние предполагаемой точки либрации (L_2) от точки M_1.

Уравнение (5.44) показывает, что функция $R_2(y, \mu)$ на концах промежутка $0 < y < 1$ имеет следующие значения:

$$R_2(0, \mu) = \mu > 0, \quad R_2(1, \mu) = \mu - 1 < 0.$$

Таким образом, функция $R_2(y, \mu)$ имеет в промежутке $(0, 1)$ по крайней мере один корень (или даже нечетное число корней), соответствующий точке либрации (L_2) между M_0 и M_1.

Однако этот корень нельзя представить рядом, расположенным по степеням параметра μ, как в предыдущем случае, даже если N есть целое число. Действительно, при $\mu = 0$ мы получаем из (5.44)

$$R_2(y,\,0) = y^{N-1}[(1-y)^N - 1]. \tag{5.44'}$$

Но разлагая $(1-y)^N$ в ряд бинома, что возможно при любом вещественном N, так как искомое y заведомо меньше единицы, мы найдем из (5.44′)

$$R_2(y,\,0) = y^N\left[-N + \frac{1}{2}N(N-1)\,y + \ldots\right],$$

что показывает, что при целом N функция $R_2(y,\,0)$ имеет корень $y_1 = 0$ кратности N.

Чтобы обойти это затруднение, мы можем поступить так же, как это делается и в классической задаче, т. е. положим

$$\frac{1}{N}\mu = \chi^N,$$

разрешим затем уравнение (5.44) относительно y^N и извлечем корень N-й степени из обеих частей полученного равенства (все эти операции возможны и при любом N).

В результате мы получим уравнение

$$y(\chi) = \chi\left[\frac{y^{N-1} + (1-y)^{N-1} - y^{N-1}(1-y)^{N-1}}{1 - \frac{1}{2}(N-1)\,y + \ldots}\right]^{\frac{1}{N}}. \tag{5.44''}$$

Уравнение (5.44′) показывает, что при любом N искомая величина y разложима в ряд, расположенный по целым, положительным степеням χ, а следовательно, по целым, положительным степеням величины $\left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}}$, и мы получим

$$y = \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots, \quad x = 1 - \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots \tag{5.44'''}$$

Ряды (5.44‴) сходятся абсолютно, во всяком случае, когда N есть число целое, но эти ряды могут оказаться сходящимися и в других случаях. Точка (L_2), соответствующая рядам (5.44‴), приближается к точке M_1, когда μ стремится к нулю (под μ подразумевается, как обычно, меньшая из двух масс точек M_0 и M_1).

Оставшийся случай, т. е. вопрос о существовании точки (L_3), расположенной справа от M_1, рассматривается совершенно так же, как и предыдущий. Беря опять за искомую неизвестную расстояние $\bar{\Delta} = y$, имеем $x = 1 + y$ и уравнение (5.42) приведется к следующей форме:

$$R_3(y, \mu) = y^{N-1}[(1+y)^N - 1] + \\ + \mu\left[y^{N-1} - (1+y)^{N-1} - y^{N-1}(1+y)^{N-1}\right] = 0. \qquad (5.45)$$

Из этого уравнения находим

$$R_3(0, \mu) = -\mu < 0, \quad R_3(1, \mu) = (1-\mu)(2^N - 1) > 0,$$

откуда заключаем, что функция $R_3(y, \mu)$ имеет в промежутке $0 < y < 1$ один корень (или нечетное число корней).

Этот корень соответствует точке либрации (L_3), лежащей на оси абсцисс между точкой M_1 и точкой, абсцисса которой равна единице.

Этот корень находим так же, как и в предыдущем случае. Действительно, при $\mu = 0$ уравнение (5.45) приводится к виду

$$R_3(y, 0) = y^{N-1}[(1+y)^N - 1] = 0, \qquad (5.45')$$

что опять можно написать следующим образом:

$$R_3(y, 0) = y^N\left[N + \frac{1}{2}N(N-1)y + \ldots\right] = 0.$$

Следовательно, если N — целое число, то уравнение (5.45) имеет корень $y_1 = 0$ кратности N.

Полагая опять $\mu = N\chi^N$ и повторяя те же действия, мы получим уравнение

$$y = \chi\left[\frac{y^{N-1}(1+y)^{N-1} + (1+y)^{N-1} - y^{N-1}}{1 + \frac{1}{2}(N-1)y + \ldots}\right]^{\frac{1}{N}}, \qquad (5.45'')$$

решение которого находим в виде ряда, абсолютно сходящегося при достаточно малом μ, когда N — целое (но такой ряд может оказаться сходящимся и в других случаях, когда N есть дробное, иррациональное или трансцендентное число):

$$y = \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots, \quad x = 1 + \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots, \qquad (5.45''')$$

расположенного по целым положительным степеням $\left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}}$.

Ряды (5.45''') определяют положение точки (L_3), которая приближается к точке M_1, когда параметр μ стремится к нулю.

Итак, когда μ уменьшается, приближаясь к нулю, каждая из найденных точек либрации стремится к предельной точке, которой для (L_1) является точка -1, а точки (L_2) и (L_3) обе стремятся к точке $+1$. Возникает вопрос, как будут изменяться положения точек либрации, когда μ возрастает, приближаясь к своему предельному значению $-\frac{1}{2}$?

Очевидно, что при возрастании μ каждая из точек либрации будет двигаться в противоположном направлении, т. е. точка (L_1) будет перемещаться слева направо, точка (L_2) — справа налево и точка (L_3) — слева направо. Однако определить предельные положения точек либрации весьма затруднительно и это можно сделать только путем численного анализа, полагая в уравнениях (5.43) — (5.45) $\mu=\frac{1}{2}$ и вычисляя для каждого из полученных уравнений вещественный корень, численно меньший единицы.

Примечание. Все результаты разделов 2 и 4 этого параграфа остаются справедливыми, конечно, и для классической задачи, т. е. для случая, когда все действующие силы определяются законом Ньютона. Для этого нужно только в разделе 2 положить

$$F_{01}=F_{10}=\frac{f}{r_1^2},\quad F_{20}=\frac{f}{r^2},\quad F_{21}=\frac{f}{\Delta^2},$$

а в разделе 4 просто положить $N=3$.

Для этого случая уравнения, определяющие положения точек либрации, являются уравнениями 5-й степени, которые называются *уравнениями Эйлера* и имеют следующий вид:

$$R_1(x,\mu)=x^5+(1+\mu)x^4+(1+2\mu)x^3-(1-\mu)x^2-\\-2(1-\mu)x-(1-\mu)=0. \qquad (E_1)$$

Это уравнение имеет только одну перемену знаков, а поэтому, по теореме Декарта, имеет единственный положительный корень, который в общем случае, как мы уже знаем, лежит в промежутке $(0, 1)$. Для достаточно малых значений μ этот корень определяется абсолютно сходящимся рядом, который получаем из (5.43″) в виде

$$x(\mu)=1-\frac{1}{2}\mu+\ldots \qquad (L_1)$$

Далее, из (5.44) имеем

$$R_2(y,\mu)=y^5-(3-\mu)y^4-(3-2\mu)y^3-\mu y^2-2\mu y-\mu=0. \qquad (E_2)$$

Это уравнение также имеет только одну перемену знаков и, следовательно, имеет в промежутке $(0, 1)$ единственный положительный корень. При $\mu=0$ это уравнение имеет тройной корень $y=0$, который для малых значений μ определяется рядом, который получим из (5.44‴):

$$y=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\ldots,\quad x=1-\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\ldots.\tag{L_2}$$

Наконец, из (5.45) выводим

$$R_3(y,\mu)=y^5+(3-\mu)y^4+(3-2\mu)y^3-\mu y^2-2\mu y-\mu=0,\tag{E_3}$$

откуда заключаем, что в промежутке (0, 1) это уравнение имеет единственный, положительный корень. Так как при $\mu=0$ (E_3) имеет тройной корень $y=0$, то для достаточно малых μ решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $\mu=0$, представляется рядом

$$y=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\ldots,$$

откуда выводим

$$x=1+\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\ldots.\tag{L_3}$$

Таким образом, в классической ограниченной задаче трех тел имеем три точки либрации, лежащие на прямой (M_0M_1). В системе координат с осями неизменного направления каждая из трех этих точек описывает в плоскости движения точки M_1 орбиту, подобную орбите этой точки, т. е. эллипс, параболу или гиперболу. Если орбита точки M_1 есть окружность или прямая линия, то и каждая из трех эйлеровых точек либрации описывает также окружность или движется, оставаясь всегда на прямой (M_0M_1).

§ 3. Уравнения возмущенного движения вблизи точек либрации

1. Для аналитического исследования устойчивости какого-либо движения механической системы необходимо иметь аналитическое решение уравнений движения. Такая возможность в задачах небесной механики представляется весьма редко и вообще только в случаях, когда уравнения движения при помощи некоторых преобразований могут быть приведены к уравнениям, допускающим решения, в которых все неизвестные имеют постоянные значения.

В общей ограниченной задаче трех тел (материальных точек) уравнения движения пассивно действующей точки M_2 могут быть преобразованы к виду (5.20), и эти уравнения, как было показано в предыдущем параграфе, могут допускать при известных условиях решения, в которых координаты Нехвила ξ, η и ζ остаются постоянными для всех значений независимой переменной v, а значит, и при всех значениях t.

Этим решениям соответствуют лагранжевы и эйлеровы точки либрации, и мы можем поставить вопрос об устойчивости в смысле Ляпунова (см. главу II) этих либрационных решений.

Для этого составим прежде всего уравнения возмущенного движения точки M_2, т. е. движения, начальные условия которого мало отличаются от начальных условий невозмущенного движения (движения, соответствующего какой-либо из пяти точек либрации), предполагая, конечно, что соответствующая точка существует.

Итак, предположим, что существует точка либрации (L) с постоянными координатами $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ и $\zeta = \zeta_0 = 0$, так как все точки либрации находятся в плоскости $(O\xi\eta)$.

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к невозмущенному, полагая

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \quad \zeta = z. \tag{5.46}$$

Буквы x, y, z обозначают здесь отклонения от ξ_0, η_0, $\zeta_0 = 0$, т. е. от нехвиловских координат точек либрации и, разумеется, не совпадают с координатами точки M_2 во вращающихся осях, и мы их будем употреблять теперь исключительно для большей простоты обозначений, так как придумать для возмущений какие-либо другие простые обозначения затруднительно и неудобно.

Делая подстановку (5.46) в уравнения (5.20), мы получим уравнения возмущенного (около рассматриваемой точки либрации) движения точки M_2, которые напишем в виде

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= X, \\ y'' + 2x' &= Y, \\ z'' + z &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

Правые части уравнений (5.47) (которые мы опять обозначили для простоты теми же буквами, как и в уравнениях (5.11)) получаются преобразованием (5.46) правых частей уравнений (5.20) и являются функциями независимой переменной v, координат x, y, z, и вообще их первых и вторых производных по v. Эти правые части обращаются тождественно в нули, когда все переменные и их производные равны нулю, т. е. для невозмущенного движения, соответствующего рассматриваемой точке либрации (L).

Разлагая теперь правые части (5.47) в ряды по степеням x, y, z и их производных, мы получим

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}x + p_{12}y + q_{11}x' + q_{12}y' + r_{11}x'' + r_{12}y'' + \ldots, \\ y'' + 2x' &= p_{21}x + p_{22}y + q_{21}x' + q_{22}y' + r_{21}x'' + r_{22}y'' + \ldots, \\ z'' + z &= pz + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

где все коэффициенты — известные функции v или известные вещественные постоянные.

Последний случай будем иметь, например, для круговой ограниченной задачи ($r_1 = \text{const}$), когда все действующие силы не зависят от времени.

Заметим, что выписанные в (5.48) линейные члены в первых двух уравнениях не содержат величин z, z', z'', а в третье уравнение не входят члены с x, y и их производными. Это объясняется тем, что z, z' и z'' входят в первые два уравнения только через посредство $\bar{\rho}$, $\bar{\Delta}$ и их производных, а правая часть третьего уравнения содержит z множителем, который будет входить и во все остальные производные от Z по x и y. Но члены высших порядков относительно возмущений и их производных первого и второго порядков вообще входят в разложения величин X, Y, Z.

2. Если в уравнениях (5.48) отбросить все члены порядка выше первого, то получим уравнения первого приближения (уравнения в вариациях, по терминологии Пуанкаре), которые распадаются, как непосредственно видно, на систему двух уравнений с неизвестными x, y и одно, независимое от первой системы, уравнение с неизвестной z.

Теперь выпишем формулы для определения коэффициентов уравнений в вариациях системы (5.48) отдельно для случая лагранжевых точек либрации и отдельно для эйлеровых.

Для лагранжевых точек либрации (L_4) и (L_5) мы имеем

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r = \Delta = r_1, \quad \bar{\rho} = \bar{\Delta} = 1. \tag{5.49}$$

Положим теперь для сокращения

$$\left.\begin{aligned} &F = (1-\mu)F_{10} + \mu F_{01}, \quad \Phi = (1-\mu)F_{10} - \mu F_{01}, \\ &F^* = (1-\mu)F_{20}^* + \mu F_{21}^*, \quad \Phi^* = (1-\mu)F_{20}^* - \mu F_{21}^*, \\ &F_{20}^* = \frac{\partial F_{20}}{\partial r_1}\cdot r_1 + \frac{\partial F_{20}}{\partial \dot{r}_1}\cdot \dot{r}_1 + \frac{\partial F_{20}}{\partial \ddot{r}_1}\cdot \ddot{r}_1, \\ &F_{21}^* = \frac{\partial F_{21}}{\partial r_1}\cdot r_1 + \frac{\partial F_{21}}{\partial \dot{r}_1}\cdot \dot{r}_1 + \frac{\partial F_{21}}{\partial \ddot{r}_1}\cdot \ddot{r}_1, \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

где вследствие (5.49) функции F_{20} и F_{21} зависят только от v, r_1, $\dot{r}_1$, $\ddot{r}_1$ и, следовательно, являются известными функциями от v

или известными постоянными. (Напомним, в самом деле, что движение точки M_1 в плоскости $(x_1M_0y_1)$ предполагается известным, так что r_1 и ее производные — известные функции v, если же $r_1 = \text{const}$, то $\dot{r}_1 = 0$, $\ddot{r}_1 = 0$.)

Выполняя затем все необходимые для нахождения коэффициентов уравнений первого приближения дифференцирования и упрощения полученных формул, мы найдем следующие выражения для этих коэффициентов для лагранжевых точек либрации (L_4) и (L_5) (заметим при этом, что когда в формуле стоит двойной знак, то знак «+» соответствует точке (L_4), лежащей в верхнем правом квадранте плоскости ($\xi M_0\eta$), а знак «—» относится к точке (L_5), лежащей в нижнем правом квадранте той же плоскости)*):

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{4}\cdot\frac{r_1^3}{c^2}(F - F^*),\\ p_{12} &= -\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{r_1^3}{c^2}(\Phi - \Phi^*),\\ p_{21} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{r_1^3}{c^2}(\Phi - \Phi^*),\\ p_{22} &= \frac{3}{4}\cdot\frac{r_1^3}{c^2}(F - F^*), \end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{11} &= -\frac{r_1^2}{4c}\cdot\frac{\partial F}{\partial \dot{r}_1},\\ -q_{12} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{r_1^2}{c}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}_1},\\ -q_{21} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{r_1^2}{c}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}_1},\\ q_{22} &= -\frac{3}{4}\cdot\frac{r_1^2}{c}\cdot\frac{\partial F}{\partial \dot{r}_1}, \end{aligned}\right\} \tag{5.51$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{11} &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial F}{\partial \ddot{r}},\\ -r_{12} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{r}},\\ -r_{21} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{r}},\\ r_{22} &= -\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial F}{\partial \ddot{r}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.51$''$}$$

*) Предполагается, конечно, что все функции F_{2i} дифференцируемы любое число раз по каждой из входящих в них переменных.

Наконец,

$$p = 0. \tag{5.51'''}$$

Из этих формул следует, что в самом общем случае мы имеем всегда

$$p_{22} = 3p_{11}, \quad p_{21} = p_{12}; \quad q_{22} = 3q_{11}, \quad q_{21} = q_{12}, \quad r_{22} = 3r_{11}, \quad r_{21} = r_{12},$$

и уравнения в вариациях для треугольных точек либрации примут вид

$$\left.\begin{aligned} &x'' - 2y' = p_{11}x + p_{12}y + q_{11}x' + q_{12}y' + r_{11}x'' + r_{12}y'',\\ &y'' + 2x' = p_{12}x + 3p_{11}y + q_{12}x' + 3q_{11}y' + r_{12}x'' + 3r_{11}y'',\\ &\quad z'' + z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.52}$$

и для составления этих уравнений потребуется вычислить только шесть величин: p_{11}, p_{12}, q_{11}, q_{12}, r_{11}, r_{12}.

Для эйлеровых решений, т. е. для точек либрации (L_i) $(i = 1, 2, 3)$, введем сначала для сокращения формул следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} F_{20}^* &= \frac{\partial F_{20}}{\partial r} \cdot r + \frac{\partial F_{20}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial F_{20}}{\partial \ddot{r}} \ddot{r},\\ F_{21}^* &= \frac{\partial F_{21}}{\partial \Delta} \cdot \Delta + \frac{\partial F_{21}}{\partial \dot{\Delta}} \dot{\Delta} + \frac{\partial F_{21}}{\partial \ddot{\Delta}} \ddot{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

где, как и прежде,

$$r = r_1\bar{\rho}, \quad \Delta = r_1\bar{\Delta}.$$

Теперь для коэффициентов уравнений в вариациях для точек (L_i) имеем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} p_{11}^{(i)} &= \frac{r_1^3}{c^2}\left[F(M_1) - \frac{1-\mu}{\bar{\rho}_i} F_{20}^*(L_i) - \frac{\mu}{\bar{\Delta}_i} F_{21}^*(L_i)\right],\\ p_{12}^{(i)} &= p_{21}^{(i)} = 0,\\ p_{22}^{(i)} &= \frac{r_1^3}{c^2}\left[F(M_1) - \frac{1-\mu}{\bar{\rho}_i} F_{20}(L_i) - \frac{\mu}{\bar{\Delta}_i} F_{21}(L_i)\right], \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{11}^{(i)} &= -\frac{r^2}{c}\left[(1-\mu)\left(\frac{\partial F_{20}}{\partial \dot{r}}\right)_i + \mu\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \dot{\Delta}}\right)_i\right],\\ q_{12}^{(i)} &= q_{21}^{(i)} = q_{22}^{(i)} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.54'}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{11}^{(i)} &= -(1-\mu)\left(\frac{\partial F_{20}}{\partial \ddot{r}}\right)_i - \mu\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \ddot{\Delta}}\right),\\ r_{12}^{(i)} &= r_{21}^{(i)} = r_{22}^{(i)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.54''}$$

Наконец,

$$p^{(i)} = p_{22}^{(i)}. \tag{5.54'''}$$

Значок «i» во всех этих формулах указывает, что всюду вместо $\bar{\rho}$ и $\bar{\Delta}$ нужно поставить $\bar{\rho}_i$ и $\bar{\Delta}_i$, соответствующие точке (L_i).

Уравнения в вариациях для точки (L_i) $(i = 1, 2, 3)$ напишутся теперь следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}^{(i)} x + q_{11}^{(i)} x' + r_{11}^{(i)} x'', \\ y'' + 2x' &= p_{22}^{(i)} y, \\ z'' + z &= p_{22}^{(i)} z. \end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

3. В некоторых случаях, которые полезно отметить, выражения для коэффициентов уравнений в вариациях несколько упрощаются.

Пусть, например, все действующие силы подчиняются одному и тому же закону, т. е.

$$F_{01} = F_{10} = F_{20} = F_{21} = F.$$

Тогда в формулах (5.50)

$$F = F(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), \qquad \Phi = (1 - 2\mu) F(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1),$$
$$F^* = F^*(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), \quad \Phi^* = (1 - 2\mu) F^*(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1),$$
$$F^* = \frac{\partial F}{\partial r_1} \cdot r_1 + \frac{\partial F}{\partial \dot{r}_1} \dot{r}_2 + \frac{\partial F}{\partial \ddot{r}_1} \ddot{r}_1,$$

а в формулах (5.53)

$$F_{20} = F(v, r, \dot{r}, \ddot{r}), \quad F_{21} = F(v, \Delta, \dot{\Delta}, \ddot{\Delta}).$$

Вернемся к общему случаю, но допустим, что функции F_{ij} не содержат вторых производных от соответствующих расстояний. Тогда, как видно из (5.51''), коэффициенты r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22} в уравнениях (5.52) все равны нулю и система (5.52) примет вид

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11} x + p_{12} y + q_{11} x' + q_{12} y', \\ y'' + 2x' &= p_{12} x + 3p_{11} y + q_{12} x' + 3q_{11} y', \\ z'' + z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.52'}$$

а система (5.54) в этом случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}^{(i)} x + q_{11}^{(i)} x', \\ y'' + 2x' &= p_{22}^{(i)} y, \\ z'' + z &= p_{22}^{(i)} z. \end{aligned}\right\} \tag{5.55'}$$

Если функции F_{ij} не содержат также первых производных, то все коэффициенты при x' и y' в (5.52′) и (5.55′) также равны нулю и уравнения (5.52′) и (5.55′) еще более упростятся и напишутся соответственно следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}x + p_{12}y, \\ y'' + 2x' &= p_{12}x + 3p_{11}y, \\ z'' + z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.52''}$$

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}^{(i)}x, \\ y'' + 2x' &= p_{22}^{(i)}y, \\ z'' + z &= p_{22}^{(i)}z. \end{aligned}\right\} \tag{5.55''}$$

Пусть все законы сил одинаковы и притом не зависят явно от независимой переменной. Уравнения (5.52″) и (5.55″) сохраняют свой вид, а их коэффициенты имеют в этом случае следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{4}\cdot\frac{r_1^3}{c^2}\left[F(r_1) - r_1\frac{dF(r_1)}{dr_1}\right], \\ p_{12} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{r_1^3}{c^2}(1-2\mu)\left[F(r_1) - r_1\frac{dF(r_1)}{dr_1}\right], \\ p_{22} &= 3p_{11}, \\ p_{11}^{(i)} &= \frac{r_1^3}{c^2}\left[F(r_1) - (1-\mu)r_1\frac{dF(r_i)}{dr_i} - \mu r_1\frac{dF(\Delta_i)}{d\Delta_i}\right], \\ p_{22}^{(i)} &= \frac{r_1^3}{c^2}\left[F(r_1) - \frac{1-\mu}{\bar\rho_i}F(r_i) - \frac{\mu}{\bar\Delta_i}F(\Delta_i)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.56}$$

В частности, для случая степенного закона (5.37) из (5.56) находим

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} = -\frac{fk}{4c^2}r_1^{k+4}, \quad -p_{12} = \pm\frac{fk(1-2\mu)\sqrt{3}}{4c^2}r_1^{k+4}, \quad p_{22} = 3p_{11}, \\ &p_{11}^{(i)} = \frac{fr_1^{k+4}}{c^2}\left\{1 - (k+1)\left[(1-\mu)\bar\rho_i^k + \mu\bar\Delta_i^k\right]\right\}, \\ &p_{22}^{(i)} = \frac{fr_1^{k+4}}{c^2}\left\{1 - \left[(1-\mu)\bar\rho_i^k + \mu\bar\Delta_i^k\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.56'}$$

Для закона Ньютона $k = -3$,

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos v} = p\bar r_1, \quad p = \frac{c^2}{f(m_0 + m_1)} = \frac{c^2}{f},$$

так как сумма масс двух активных точек взята за единицу. Поэтому формулы (5.56′) дают для этого случая

$$\left.\begin{aligned}&p_{11}=\frac{3}{4}\bar r_1,\quad p_{12}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\bar r_1,\quad p_{22}=\frac{9}{4}\bar r_1,\\&p_{11}^{(i)}=\bar r_1(1+2A_i),\quad p_{22}^{(i)}=\bar r_1(1-A_i),\end{aligned}\right\}\tag{5.56′}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar r_1&=(1+e\cos v)^{-1},\\A_i&=\frac{1-\mu}{\bar\rho_i^3}+\frac{\mu}{\bar\Delta_i^3}>0.\end{aligned}\right\}\tag{5.56″}$$

Уравнения в вариациях для ньютоновской ограниченной задачи имеют, следовательно, следующий вид:
для (L_i) $(i=1, 2, 3)$

$$\left.\begin{aligned}x''-2y'&=\bar r_1(1+2A_i)x,\\y''+2x'&=\bar r_1(1-A_i)y,\\z''+z&=\bar r_1(1-A_i)z\end{aligned}\right\}\tag{5.57}$$

и для (L_i) $(i=4, 5)$

$$\left.\begin{aligned}x''-2y'&=\bar r\left[\frac{3}{4}x+B_iy\right],\\y''+2x'&=\bar r\left[B_ix+\frac{9}{4}y\right],\\z''+z&=0,\end{aligned}\right\}\tag{5.58}$$

где

$$B_i=(-1)^i\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu).\tag{5.58′}$$

Для ньютоновской круговой ограниченной задачи

$$e=0,\quad \bar r_1=1,$$

и уравнения (5.57) и (5.58) являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Точно так же при любом законе сил, зависящем только от расстояния, в случае круговой ограниченной задачи уравнения в вариациях также обладают постоянными коэффициентами.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай, когда все действующие силы определяются законом Вебера с общими для всех законов постоянными значениями величин f и σ. Тогда уравнения движения точки M_1 допускают, как мы видели выше, решение $r_1=a=\text{const}$ и $\dot v=n=\text{const}$, т. е. для точки M_2 мы имеем круговую ограниченную задачу.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае условия (5.35′) выполняются (как и в каждом случае, когда в системе царствует один общий закон) и, следовательно, в задаче существуют треугольные лагранжевы решения, в которых точка M_2 является вершиной равностороннего треугольника.

Нетрудно также проверить, что в этой задаче существуют также три эйлеровых решения, соответствующие точкам либрации (L_i) $(i = 1, 2, 3)$, положения которых определяются теми же самыми уравнениями Эйлера (E_1), (E_2), (E_3) раздела 4 § 3.

Используя теперь общие формулы (5.51) и (5.54), без труда получим следующие значения для коэффициентов уравнений (5.52) для $i = 1, 2, 3$:

$$p_{11}^{(i)} = 1 + 2A_i, \quad p_{12}^{(i)} = 0, \quad p_{22}^{(i)} = 1 - A_i,$$
$$q_{11}^{(i)} = 0, \quad q_{12}^{(i)} = 0, \quad q_{22}^{(i)} = 0,$$
$$r_{11}^{(i)} = -\frac{2(1-\mu)}{\bar{\rho}_i \cdot \sigma^2}, \quad r_{12}^{(i)} = 0, \quad r_{22}^{(i)} = 0,$$
$$p^{(i)} = 1 - A_i,$$

причем A_i определяется той же формулой, что и в (5.56″). Полагая еще для краткости

$$C_i = \frac{2(1-\mu)}{\bar{\rho}_i \cdot \sigma^2} > 0,$$

мы получим уравнения в вариациях для эйлеровых точек в виде

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= (1 + 2A_i)x - C_i x'', \\ y'' + 2x' &= (1 - A_i)y, \\ z'' + A_i z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.59)$$

Для лагранжевых точек (L_i) $(i = 4, 5)$ имеем следующие значения для коэффициентов:

$$p_{11} = \frac{3}{4}, \quad p_{12} = (-1)^i \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad p_{22} = \frac{9}{4},$$
$$q_{11} = q_{12} = q_{22} = 0,$$
$$r_{11} = -\frac{1}{2}\varkappa, \quad r_{12} = (-1)^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\varkappa, \quad r_{22} = -\frac{3}{2}\varkappa,$$

где положено $\varkappa = \frac{1-\mu}{\sigma^2}$ и $\varkappa_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\varkappa$. Тогда уравнения в вариациях для лагранжевых точек имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= \frac{3}{4}x + B_i y - \frac{1}{2}\varkappa \cdot x'' + \varkappa_i y'', \\ y'' + 2x' &= B_i x + \frac{9}{4}y + \varkappa_i \cdot x'' - \frac{3}{2}\varkappa \cdot y'', \\ z'' + z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.60)$$

§ 4. Задача об устойчивости точек либрации

Предполагая, что в общей ограниченной задаче выполняются условия, обеспечивающие существование лагранжевых или эйлеровых решений, представляющихся в координатах Нехвила точками либрации, мы можем теперь поставить задачу об устойчивости этих решений в смысле Ляпунова. Решение этой задачи (когда это возможно) дает представление о характере решений уравнений возмущенного движения (5.47), близких к какому-либо либрационному решению, соответствующему какой-либо из возможных точек либрации, координаты которой обращают в нуль правые части уравнений (5.47) при любом значении независимой переменной v. Однако задача об устойчивости точек либрации, т. е. задача об устойчивости нулевого решения системы (5.47), вообще чрезвычайно сложна и решение ее в самом общем виде, т. е. при любых законах действующих сил, вряд ли может быть выполнено и доведено до конца.

Но в некоторых частных случаях решение задачи об устойчивости точек либрации оказывается возможным хотя бы в первом приближении, и к рассмотрению таких случаев мы теперь и перейдем.

1. Рассмотрим сначала случай, когда уравнения (5.47) допускают интеграл Якоби, что возможно, как было показано выше, только в случае круговой ограниченной задачи (см. § 2, раздел 1) и когда действующие силы удовлетворяют условиям (5.29).

Предположим далее, что функции F_{ij} не зависят явно от времени t и ограничимся случаем плоской задачи, когда переменная z в уравнениях (5.47) равна нулю.

Чтобы получить интеграл уравнений (5.47), нужно в (5.30) положить $z = 0$, затем перейти к переменным Нехвила подстановкой (5.19) и, наконец, подстановкой (5.46) перейти к системе четвертого порядка, определяющей отклонения от точки либрации.

При этом нужно не упускать из вида, что буквы x, y, z и X, Y, Z обозначают в уравнениях (5.11) и (5.47) совершенно разные величины. В уравнениях (5.11) эти буквы обозначают координаты и составляющие сил точки M_2 во вращающихся осях, а в уравнениях (5.47) те же буквы обозначают отклонения от координат точек либрации в системе Нехвила и правые части полученных уравнений возмущенного движения в той же системе.

Пусть имеем случай, когда действующие силы не зависят от производных соответствующих расстояний. Тогда уравнения (5.47) в плоской круговой задаче могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ y'' + 2x' &= \frac{\partial W}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{5.61}$$

где функция W определяется формулой

$$W = x^2 + y^2 + 2(1-\mu)\Phi_{20}(a\bar{\rho}) + 2\mu\Phi_{21}(a\bar{\Delta}), \tag{5.62}$$

причем при нулевых значениях отклонений от координат точки либрации правые части уравнений (5.61) обращаются тождественно в нули.

Уравнения (5.61) допускают интеграл Якоби

$$x'^2 + y'^2 = W + \bar{h}, \qquad (\bar{h} = \text{const}),$$

где функция W может быть разложена в ряд, расположенный по степеням x, y, причем этот ряд не содержит, очевидно, членов первого порядка относительно x и y, и если положить для сокращения

$$R(x, y) = 2(1-\mu)\Phi_{20}(a\bar{\rho}) + 2\mu\Phi_{21}(a\bar{\Delta}), \tag{5.62$'$}$$

то разложение функции W можно написать в виде

$$W = x^2 + y^2 + R_{11}x^2 + 2R_{12}xy + R_{22}y^2 + \ldots, \tag{5.62$''$}$$

где положено

$$R_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right)_0, \quad R_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}\right), \quad R_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right)_0 \tag{5.62$'''$}$$

(индекс «0» внизу указывает, что после дифференцирования нужно положить $x = y = 0$).

Отсюда видно, что если

$$\left.\begin{aligned} &1 + R_{11} < 0, \quad 1 + R_{22} < 0, \\ &R_1^2 - (1 + R_{11})(1 + R_{22}) < 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

то функция W будет знакоопределенной отрицательной, каковы бы ни были члены высших порядков в (5.62$''$).

Следовательно, функция V, определенная формулой

$$V = x'^2 + y'^2 - W, \quad V' \equiv 0, \tag{5.63$'$}$$

будет знакоопределенной функцией Ляпунова относительно переменных x, y, x', y', а поэтому при условиях (5.63) функция V удовлетворяет условиям первой теоремы Ляпунова (см. § 2 главы II), а значит, невозмущенное движение, определяемое точкой либрации, будет заведомо устойчиво.

Такого рода случай мы будем иметь, если функции F_{20} и F_{21} определяются формулами

$$F_{20}=f_{20}\cdot r^{k_1+1},\quad F_{21}=f_{21}\cdot\Delta^{k_2+1},$$

где f_{20}, f_{21}, k_1, k_2 — какие угодно неотрицательные постоянные. Тогда, полагая для простоты расстояние между точками M_0 и M_1 (которое есть величина постоянная в координатах Нехвила) $r_1=a=1$, мы получим для функции $R(x, y)$ следующее выражение:

$$R(x, y)=-2\left\{\frac{f_{20}(1-\mu)}{k_1+2}(x^2+y^2)^{k_1+2}+\frac{\mu f_{21}}{k_2+2}(x^2+y^2)^{k_2+2}\right\}.$$

Очевидно, что функция $R(x, y)$ есть знакоопределенная, отрицательная функция, и устойчивость точки либрации обеспечена.

Если функция $R(x, y)$ не окажется знакоопределенной отрицательной, то теорема Ляпунова неприменима и вопрос об устойчивости останется открытым.

Таков, например, случай классической задачи, где

$$f_{20}=f_{21}=f>0,\qquad k_1=k_2=-3,$$

и функция R, хотя и будет знакоопределенной, но положительной. В таких случаях исследование оказывается весьма трудным и вопрос об устойчивости может быть разрешен иногда только в первом приближении, когда уравнения возмущенного движения приводятся к виду (5.52), т. е. оказываются линейными уравнениями.

Примечание. Уравнения (5.47) имеют интеграл и для пространственной круговой задачи, притом и в более общем случае, лишь бы законы сил удовлетворяли условиям (5.29). Тогда, как было показано выше, уравнения движения во вращающихся осях допускают интеграл (5.30). Переходя затем к координатам Нехвила, мы получим интеграл уравнений (5.20), где $r_1=a$ можно принять за единицу расстояний, а F, так же как и F_{01}, является постоянной. Полученный таким образом интеграл преобразуем затем подстановкой (5.46), что и даст нам в результате интеграл возмущенного движения вблизи какой-либо из точек либрации. Этот интеграл, в соответствии с формулой (5.31), напишется следующим образом:

$$x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+2R(x, y, z, x', y', z')+2h_1, \tag{5.64}$$

где

$$R=(1-\mu)\Phi_{20}(\bar\rho, \bar\rho')+\mu\Phi_{21}(\bar\Delta, \bar\Delta') \tag{5.64$'$}$$

(x, y, z здесь опять обозначают возмущения).

Для уравнений первого приближения, которые для каждой точки либрации распадаются на систему двух уравнений и одно независимое от них, последнее дает интеграл

$$z'^2 = (p-1)\,z^2 + h_2, \tag{5.64''}$$

с помощью которого можно исключить z'^2 из (5.64), что дает

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 + (1-p)\,z^2 + 2R\,(x, y, z, x', y') + \text{const}.$$

2. Рассмотрим уравнения в вариациях (5.52) для треугольных точек либрации (L_4), (L_5) и уравнения (5.55) для прямолинейных точек (L_1), (L_2), (L_3).

Предположим при этом, что задача круговая и что действующие силы не содержат явно время t, а значит, и переменную v, которая для круговой задачи просто пропорциональна времени $(v = nt)$.

Тогда все коэффициенты уравнений в вариациях являются вещественными постоянными, и вопрос об устойчивости сводится к рассмотрению характеристического (или, что то же, определяющего) уравнения, соответствующего уравнениям с постоянными коэффициентами, и установлению природы его корней.

Возьмем сначала более простую систему (5.55). Характеристическое уравнение этой системы распадается на квадратное уравнение

$$\lambda^2 = p_{22}^{(i)} - 1 \tag{5.65}$$

и на уравнение четвертой степени, которое имеет вид

$$\left(1 - r_{11}^{(i)}\right)\lambda^4 - q_{11}^{(i)}\lambda^3 + \left(4 - p_{11}^{(i)} - p_{22}^{(i)} + r_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}\right)\lambda^2 + \\ + q_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}\lambda + p_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)} = 0. \tag{5.66}$$

Отсюда видно, что при $p_{22}^{(i)} > 1$ уравнение (5.65) имеет два вещественных корня, из которых один отрицателен, а другой положителен. Следовательно, по теоремам Ляпунова (§ 3 главы II) отсюда сразу следует, что нулевое решение уравнений (5.55) неустойчиво, а поэтому и нулевое решение полной системы (5.47) или (5.48) в случае постоянных коэффициентов линейных членов также неустойчиво, каковы бы ни были члены высших порядков.

Это заключение остается верным и в том случае, когда коэффициенты членов высших порядков будут функциями v, лишь бы они оставались непрерывными и ограниченными функциями при всех значениях v.

Если $p_{22}^{(i)} \leqslant 1$, то оба корня уравнения (5.65) чисто мнимые или оба равны нулю. Следовательно, теперь необходимо рассматривать уравнение (5.66). Если это уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, то нулевое решение

(5.55) неустойчиво и таковым же будет нулевое решение полной системы (5.47). В противном случае мы будем иметь особенный случай задачи об устойчивости, который требует дополнительного, всегда очень трудного, исследования с учетом членов высших порядков в (5.48).

Заметим прежде всего, что если функции F_{20}, F_{21} не зависят от первых производных от соответствующих расстояний или производные от этих функций содержат множителями некоторые положительные степени $\dot{r}$ и $\dot{\Delta}$ соответственно, то, так как для точек либрации в системе Нехвила в круговой задаче расстояния r и Δ постоянны, в этих случаях величина $q_{11}^{(i)}=0$ и уравнение (5.66) становится биквадратным:

$$\left(1-r_{11}^{(i)}\right)\lambda^4+\left(4-p_{11}^{(i)}-p_{22}^{(i)}+r_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}\right)\lambda^2+p_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}=0. \qquad (5.66')$$

Случай такого рода мы будем иметь тогда, когда функции F_{20} и F_{21} зависят только от расстояний r и Δ соответственно, в частности, для случая закона Ньютона, а также закона Вебера, когда в функции F_{20}, F_{21} входят квадраты производных $\dot{r}$ и $\dot{\Delta}$.

Рассмотрим тогда уравнение (5.66′) как квадратное относительно λ^2. Если оно имеет хотя бы один вещественный положительный корень или два комплексных сопряженных, то уравнение (5.66) относительно λ будет иметь корни с положительными вещественными частями и нулевое решение системы (5.55) будет неустойчиво. Следовательно, и нулевое решение системы (5.48) также будет неустойчивым, каковы бы ни были члены высших порядков в этих уравнениях.

Поэтому для устойчивости нулевого решения системы (5.55) необходимо (но недостаточно), чтобы оба корня уравнения (5.66′), рассматриваемого как квадратное, были вещественными и отрицательными. Тогда все корни уравнения (5.66′), относительно λ, будут чисто мнимыми, попарно сопряженными и задача об устойчивости будет представлять особенный случай теоремы Ляпунова.

Напишем, для краткости, уравнение (5.66′) в виде

$$\lambda^4+p_i\lambda^2+q_i=0, \qquad (5.66'')$$

где

$$p_i=\frac{4-p_{11}^{(i)}-p_{22}^{(i)}+r_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}}{1-r_{11}^{(i)}}, \qquad q_i=\frac{p_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}}{1-r_{11}^{(i)}}.$$

Тогда условия, при которых все корни этого уравнения будут чисто мнимыми, попарно сопряженными, напишутся в виде

$$-p_i\leqslant 0, \quad -q_i<0, \quad p_i^2-4q_i\geqslant 0. \qquad (5.67)$$

Отсюда вытекает, что устойчивость нулевого решения системы (5.55) возможна только в том случае, когда $q_{11}^{(i)} \neq 0$. Если при этом уравнение (5.66) может иметь все корни с отрицательными вещественными частями, то нулевое решение системы (5.55) будет асимптотически устойчивым, а поэтому и нулевое решение системы (5.48) также будет асимптотически устойчивым, каковы бы ни были члены высших порядков в этих уравнениях, лишь бы они были ограниченными, непрерывными функциями от v.

В качестве полезного примера рассмотрим вопрос об устойчивости прямолинейных точек либрации, когда в системе царствует закон Вебера с постоянными f и σ. Ньютоновский случай получится, как уже отмечалось выше, при $\sigma = \infty$.

Тогда уравнения в вариациях примут вид (5.59), где A_i определяется формулой (5.56) и есть величина всегда положительная. Поэтому уравнение (5.65) для каждой из точек (L_i) $(i = 1, 2, 3)$ имеет два сопряженных чисто мнимых корня.

Рассмотрим теперь уравнение (5.66). В ньютоновском случае $\sigma = \infty$ и $r_{11}^{(i)} = 0$. Обозначая коэффициенты уравнения (5.66) в этом случае верхним индексом «0», имеем

$$p_i^{(0)} = 2 - A_i, \quad q_i^{(0)} = (1 - A_i)(1 + 2A_i). \tag{5.68}$$

Нетрудно показать, используя формулы (5.56″) и уравнение (5.38), где нужно положить $N = -3$, что $A_i > 1$.

Отсюда следует, что уравнение (5.66), рассматриваемое относительно λ^2, имеет вещественные корни, причем из (5.68) следует, что один корень положителен, а другой отрицателен.

Следовательно, в ньютоновском случае уравнение (5.66″) имеет пару сопряженных чисто мнимых корней и два вещественных, из которых один отрицателен, а другой — *положителен*. Это показывает, что в ньютоновском случае каждая из прямолинейных точек либрации *неустойчива*, т. е. каждое из трех эйлеровых решений также неустойчиво. В случае закона Вебера скорость распространения действия должна быть достаточно велика (порядка скорости света), а поэтому каждая из величин $r_{11}^{(i)}$ численно весьма мала.

Поэтому для каждой прямолинейной точки либрации уравнение (5.66″) будет иметь один корень, весьма мало отличающийся от положительного корня в ньютоновском случае. Следовательно, и в случае закона Вебера каждая из трех прямолинейных точек либрации тоже *неустойчива*.

Рассмотрим последний пример, когда каждая из действующих сил обратно пропорциональна N-й степени соответствующего расстояния. Тогда, при соответствующем выборе основных единиц, уравнения в вариациях напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= [1 + (N-1)\tilde{A}_i]\,x, \\ y'' + 2x' &= (1 - \tilde{A}_i)\,y, \\ z'' + \tilde{A}_i z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.69}$$

где

$$\tilde{A}_i = \frac{1-\mu}{\tilde{\rho}_i^N} + \frac{\mu}{\tilde{\Delta}_i^N} > 0. \tag{5.69'}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (5.69), имеет такой же вид, как и характеристическое уравнение для случая $N = 3$, только с заменой A_i на $\tilde{A}_i$.

Исследуя это характеристическое уравнение, что опять сводится к рассмотрению квадратных уравнений, можем убедиться, что при любом $N > 1$ это уравнение всегда имеет либо вещественный положительный корень либо комплексные корни с положительными вещественными частями. Поэтому и в этом случае каждая из прямолинейных точек либрации также *неустойчива*.

3. Перейдем к точкам либрации (L_4) и (L_5), т. е. к уравнениям (5.52), опять-таки в предположении, что коэффициенты этих уравнений являются вещественными постоянными.

Характеристическое уравнение этой системы также распадается на два уравнения, одно четвертой степени, а другое — простейшее квадратное:

$$\lambda^2 + 1 = 0, \tag{5.70}$$

корни которого $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$.

Уравнение четвертой степени, соответствующее системе, состоящей из первых двух уравнений (5.52), после всех упрощений приводится к виду ($i = 4, 5$):

$$p_0^{(i)}\lambda^4 + p_1^{(i)}\lambda^3 + p_2^{(i)}\lambda^2 + p_3^{(i)}\lambda + p_4 = 0, \tag{5.71}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} p_0^{(i)} &= (1 - r_{11}^{(i)})(1 - 3r_{11}^{(i)}) - (r_{12}^{(i)})^2, \\ p_1^{(i)} &= -2q_{11}^{(i)}(2 - 3r_{11}^{(i)}) - 2q_{12}^{(i)}r_{12}^{(i)}, \\ p_2^{(i)} &= 4(1 - p_{11}^{(i)}) - (q_{12}^{(i)})^2 - 3(q_{11}^{(i)})^2 + 6p_{11}^{(i)}r_{11}^{(i)} - 2p_{12}^{(i)}r_{12}^{(i)}, \\ p_3^{(i)} &= 6p_{11}^{(i)}q_{11}^{(i)} - 2p_{12}^{(i)}q_{12}^{(i)}, \\ p_4^{(i)} &= 3(p_{11}^{(i)})^2 - (p_{12}^{(i)})^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.71'}$$

Мы всегда будем иметь в нашей задаче особенный случай теории устойчивости по Ляпунову, если все корни уравнения

(5.71) имеют отрицательные вещественные части, так как два корня определяющего уравнения системы (5.52) чисто мнимые.

Для того чтобы все четыре корня уравнения (5.71) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все четыре определителя Гурвица были положительными (см., например, А. Г. Курош. Курс высшей алгебры). Если мы положим для сокращения

$$\bar{p}_j^{(i)} = \frac{p_j^{(i)}}{p_0^{(i)}} \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

то условия Гурвица выражаются следующими неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{p}_1^{(i)} > 0; \quad \bar{p}_1^{(i)}\bar{p}_2^{(i)} - p_3^{(i)} > 0, \quad \bar{p}_4^{(i)} > 0, \\ &\bar{p}_1^{(i)}\left(\bar{p}_2^{(i)}\bar{p}_3^{(i)} - \bar{p}_1^{(i)}\bar{p}_4^{(i)}\right) > \bar{p}_2^{(i)}\bar{p}_3^{(i)} - \bar{p}_1^{(i)}\bar{p}_3^{(i)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.72}$$

Из формул (5.71) видно, что условия (5.72) могут осуществляться только в том случае, когда по крайней мере одна из величин $q_{11}^{(i)}$ и $q_{12}^{(i)}$ отлична от нуля.

Если же $q_{11}^{(i)} = q_{12}^{(i)} = 0$, то также, очевидно, что и $\bar{p}_1^{(i)} = \bar{p}_3^{(i)} = 0$ и неравенства (5.72) не выполняются. Поэтому в последнем случае, т. е. когда уравнение (5.71) приводится к виду

$$p_0\lambda^4 + p_2\lambda^2 + p_4 = 0, \tag{5.73}$$

все корни этого уравнения заведомо не могут иметь отрицательные вещественные части и задача может быть разрешена только в том случае, когда уравнение (5.73) имеет корни с положительными вещественными частями и когда, следовательно, треугольные точки либрации окажутся н е у с т о й ч и в ы м и, каковы бы ни были члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения (5.48).

Этот случай будем иметь, когда дискриминант уравнения (5.73) есть величина отрицательная, т. е. когда

$$p_2^2 - 4p_0p_4 < 0. \tag{5.73'}$$

Тогда уравнение (5.73), рассматриваемое как квадратное относительно λ^2, имеет два сопряженных комплексных корня, а следовательно, все корни уравнения (5.73) комплексные и два из них имеют положительные вещественные части.

Если, наоборот,

$$p_2^2 - 4p_0p_4 > 0, \tag{5.74}$$

то оба корня уравнения (5.72), рассматриваемого как квадратное, действительны.

При

$$\frac{p_2}{p_0} < 0, \quad \frac{p_4}{p_0} > 0$$

оба корня положительны и уравнение (5.73) имеет два положительных корня. При

$$\frac{p_2}{p_0} < 0, \quad \frac{p_4}{p_0} < 0$$

один корень относительно λ^2 положителен, а другой отрицателен. Следовательно, уравнение (5.73) имеет один положительный корень и мы опять имеем случай неустойчивости. Следовательно, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\frac{p_2}{p_0} > 0, \quad \frac{p_4}{p_0} > 0, \quad p_2^2 - 4p_0p_4 > 0. \tag{5.75}$$

Тогда, все корни уравнения в вариациях будут чисто мнимыми и если среди этих корней нет одинаковых (т. е. три пары чисто мнимых корней все различны), то точки либрации (L_4) и (L_5) будут устойчивы в первом приближении. Сохранится ли эта устойчивость для точных уравнений (5.47) или нет, неизвестно, и этот вопрос требует дополнительного, тщательного исследования, которое может быть иногда проведено только в частных случаях.

4. Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев. Пусть опять имеем случай, когда все силы подчиняются закону Вебера и, в частности, закону Ньютона. Тогда уравнения в вариациях имеют вид (5.60) и характеристическое уравнение (5.72) напишется следующим образом:

$$(1 + 2\varkappa)\lambda^4 + \left(1 - \frac{9}{2}\mu\varkappa\right)\lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0. \tag{5.76}$$

Это уравнение одинаково и для (L_4) и для (L_5), а при $\varkappa = 0$ превращается в уравнение, соответствующее случаю закона Ньютона. Так как $\varkappa$ очень мало́, то первые два из неравенств (5.75) выполняются при любом μ.

Последнее из неравенств (5.75) принимает вид

$$1 - 27\mu(1-\mu) + \left[\frac{81}{4}\mu^2\varkappa^2 - 63\mu\varkappa - 54\varkappa\mu^2\right] > 0. \tag{5.77}$$

Если теперь

$$1 - 27\mu(1-\mu) < 0, \tag{5.78}$$

то неравенство (5.77) не выполняется и точки (L_4) и (L_5) оказываются неустойчивыми.

Если

$$1-27\mu(1-\mu)>0, \tag{5.79}$$

то при $\varkappa=0$ условие (5.78) выполняется и, следовательно, все корни уравнения в вариациях для системы (5.47) в этом случае чисто мнимые:

$$\pm\sqrt{-1}; \quad \pm\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}};$$
$$\pm\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}.$$

Следовательно, этот случай является особенным и заключать отсюда об устойчивости нулевого решения полной системы (5.47) для круговой задачи с законом Ньютона нельзя без дополнительного исследования.

Решая квадратное неравенство относительно μ, мы получим, что оно выполняется при значениях μ, заключенных в промежутке

$$0<\mu<\mu^*=0{,}0385208. \tag{5.80}$$

Для $\mu<\mu^*$ точки либрации (L_4) и (L_5) являются устойчивыми в первом приближении. Если $\mu>\mu^*$, то точки либрации неустойчивы в полном смысле. Наконец, если $\mu=\mu^*$, т. е. если $1-27\mu(1-\mu)=0$, то корни уравнений в вариациях будут

$$\pm\sqrt{-1}, \quad \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}, \quad \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}, \tag{5.81}$$

и мы опять имеем особенный случай, когда вопрос об устойчивости не может быть решен рассмотрением только уравнений первого приближения.

Исследование устойчивости точек либрации (L_4) и (L_5) проводилось неоднократно многими советскими и зарубежными учеными.

Эти исследования математически весьма сложны и длинны и в нашей книге изложены быть не могут. Окончательные результаты в этой области принадлежат А. П. Маркееву, который показал в ряде работ, что нулевые решения системы (5.47), соответствующие точкам либрации (L_4) и (L_5) в круговой задаче с законом Ньютона устойчивы для почти всех начальных значений и при всех значениях μ в промежутке (5.80), кроме двух значений,

$$\mu_1=0{,}0242938, \quad \mu_2=0{,}0135160,$$

при которых точки (L_4) и (L_5) неустойчивы в строгом смысле.

Возвращаясь теперь к случаю закона Вебера, т. е. к неравенству (5.77), и имея в виду, что $\varkappa=(1-\mu)\gamma$, где $\gamma=\sigma^{-2}$, мы получим следующее неравенство, при выполнении которого треугольные точки будут устойчивыми в первом приближении:

$$\frac{81}{4}\gamma^2\mu^4 - 54\gamma\mu^3 - (27 + 63\gamma)\mu^2 + (27 - 63\gamma)\mu - 1 > 0. \quad (5.82)$$

Чтобы получить критическое значение μ, соответствующее (5.80), нужно заменить в (5.82) неравенство равенством и найти наибольший положительный корень полученного уравнения четвертой степени относительно μ. Для этого заметим, что при $\gamma = 0$ (5.82) превращается в (5.79) и критическое значение μ есть μ^*, приведенное в (5.80). Поэтому возможно получить корень уравнения четвертой степени в виде ряда, расположенного по степеням параметра γ и обращающегося в μ^* при $\gamma = 0$. Этот ряд имеет вид

$$\bar{\mu}^* = \mu^* + \gamma\bar{\mu}_1^* + \ldots \quad (5.82')$$

Вычисляя $\bar{\mu}_1^*$, получим

$$\bar{\mu}_1^* = -54(\mu^*)^3 - 63(\mu^*)^2 - 63. \quad (5.82'')$$

Для приближенной оценки второго члена в (5.82) примем $\mu^* = 0{,}04$, что дает $\bar{\mu}_1^* = -64$, и из (5.82) получим

$$\bar{\mu}^* = \mu^* - 64\gamma + \ldots \quad (5.83)$$

Но параметр $\gamma = \sigma^{-2}$, где σ есть скорость распространения действия, т. е. величина порядка скорости света. Возьмем для σ даже несколько меньшую величину, например, $\sigma = 10^5$ *км/сек*. Это значение нужно пересчитать в принятых нами единицах, где расстояние между M_0 и M_1 $a = 1$, а единицей времени служит время полного оборота точки M_1 вокруг точки M_0 по круговой орбите. Для Луны $\mu \approx 0{,}01$, а период обращения Луны приблизительно составляет $9 \cdot 10^5$ секунд.

Тогда получим для случая Луны $\gamma \approx 10^{-11}$.

Следовательно, для случая Луны будем иметь

$$\bar{\mu}^* = \mu^* - O(10^{-9}) + \ldots,$$

что не отличается от (5.80) даже в последней значащей цифре.

Поэтому можно быть уверенным, что при законе Вебера точки либрации (L_4) и (L_5) будут также устойчивы в первом приближении, так как для Луны μ есть величина порядка 10^{-2} и, значит, заведомо лежит в промежутке $(0, \mu^*)$.

Так как γ чрезвычайно мало́ для Луны, то можно не сомневаться, что результаты А. П. Маркеева останутся справедливыми и в случае закона Вебера. Поэтому можно считать, что точки либрации (L_4) и (L_5) также будут устойчивы в строгом смысле, когда в системе Земля — Луна — спутник действует вместо закона Ньютона закон Вебера.

5. В предыдущих разделах мы рассматривали устойчивость точек либрации только в случае круговой ограниченной задачи трех тел. Для случая некруговой задачи правые части уравнений возмущенного движения зависят явно от независимой переменной v, а поэтому и все коэффициенты разложений величин X, Y, Z в уравнениях (5.47) будут функциями v. В частности, коэффициенты уравнений первого приближения также являются функциями v, вид и структура которых зависят от (некругового) движения точки M_1, вследствие чего задача становится чрезвычайно сложной, даже в первом приближении.

Однако хотя многие авторы занимались задачей об устойчивости точек либрации, но только для случая, когда в системе действует закон Ньютона и когда орбита точки M_1 есть эллипс с фокусом в точке M_0. Такая задача называется, как уже отмечалось выше, *эллиптической ограниченной задачей трех тел* (конечно, трех материальных точек, из которых одна — пассивно гравитирующая).

Большинство исследований посвящено при этом плоской ограниченной задаче, рассмотрением которой мы здесь и ограничимся.

Этой задачей впервые занимался А. М. Ляпунов в 1889 г. (Ляпунов А. М., Собр. соч., т. I, Изд-во АН СССР, 1954) для случая лагранжевых решений неограниченной задачи трех тел.

Для случая ограниченной задачи из исследований Ляпунова можно вывести следующее: 1) для достаточно малых значений μ точки (L_4) и (L_5) в плоской эллиптической задаче устойчивы в первом приближении и 2) при достаточно малых значениях эксцентриситета e кеплеровской орбиты точки M_1 (L_4) и (L_5) устойчивы, если выполняется одно из неравенств:

$$\left.\begin{aligned} 0 < \mu(1-\mu) < \frac{1}{36} - f_1(e), \\ \frac{1}{36} + f_2(e) < \mu(1-\mu) < \frac{1}{27} + f_3(e), \end{aligned}\right\} \qquad (5.83')$$

где $f_1(e)$, $f_2(e)$, $f_3(e)$ обозначают некоторые положительные функции от e, обращающиеся в нули при $e = 0$.

Во второй половине нашего века задачей об устойчивости точек либрации занимались многие авторы и в нашей стране и за рубежом. Из советских ученых можно назвать Е. А. Гребеникова, А. П. Маркеева, Л. Г. Лукьянова, Н. А. Артемьева и отчасти Г. Н. Дубошина.

Все авторы посвящали свое внимание только плоской эллиптической задаче. Только один А. П. Маркеев рассматривал также и пространственную задачу в нелинейной постановке, но с учетом только членов до четвертого порядка в разложениях правых частей уравнений (5.47).

Рассмотрим уравнения в вариациях (5.57) для эйлеровых точек (L_1), (L_2), (L_3) и уравнения (5.58) для лагранжевых точек (L_4), (L_5). В этих уравнениях зависимость коэффициентов от независимой переменной v осуществляется только наличием множителя $\bar{r}$, который, как уже было сказано, определяется формулой

$$\bar{r} = \frac{1}{1 + e\cos v}.$$

Таким образом, коэффициенты уравнений в вариациях являются аналитическими, голоморфными функциями от параметра e и периодическими функциями от v с периодом 2π.

По теореме Ляпунова, приведенной в разделе 3 § 3 главы I, отсюда следует, что коэффициенты характеристического уравнения, соответствующего каждой из систем (5.57) и (5.58), также являются аналитическими, голоморфными функциями от параметра, которым в нашей задаче является эксцентриситет e.

С. Н. Шиманов доказал в 1954 г., что характеристические показатели системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами также являются голоморфными функциями от параметра, входящего в коэффициенты такой системы.

В рассматриваемой задаче таким параметром является e, и задача сводится к исследованию рядов, расположенных по степеням e и представляющим характеристические показатели систем (5.57) и (5.58). Такие ряды можно составить и провести их исследование аналитическим или численным путем. Эти процедуры довольно сложны и длинны и мы их приводить не будем, отсылая интересующегося этими вопросами читателя к работам упомянутых авторов.

Однако можно заметить, что при $e = 0$ характеристические показатели должны совпадать с корнями характеристических уравнений, соответствующими случаю $e = 0$. Поэтому в тех случаях, когда характеристическое уравнение имеет корни с положительными вещественными частями (т. е. когда в круговой задаче точки либрации неустойчивы), при $e \neq 0$, но достаточно малом, характеристические показатели также будут иметь корни с положительными вещественными частями, вследствие чего точки либрации будут неустойчивыми также и в эллиптической задаче.

В круговой задаче прямолинейные точки, как было показано, неустойчивы. Поэтому и в эллиптической задаче, по крайней мере при достаточно малых значениях e, прямолинейные точки также все будут неустойчивы.

Треугольные точки либрации в круговой задаче оказываются неустойчивыми при $\mu > \mu^*$. Поэтому и в эллиптической задаче лагранжевы точки при $\mu > \mu^*$, по крайней мере при достаточно малых значениях e, также будут неустойчивы.

Что касается случаев, когда лагранжевы точки будут устойчивы, мы ограничимся уже приведенными результатами Ляпунова, которые показывают, что при μ, удовлетворяющем одному из неравенств (5.83), и при достаточно малых значениях эксцентриситета e, точки (L_4) и (L_5) оказываются устойчивыми.

§ 5. Периодические решения круговой ограниченной задачи в классическом случае

1. Хотя, как уже неоднократно отмечалось, мы не можем найти общее решение даже круговой ограниченной задачи в классическом случае, т. е. когда в системе царствует закон Ньютона с постоянным коэффициентом пропорциональности, но мы знаем некоторые простые частные решения этой задачи, соответствующие в координатах Нехвила пяти точкам либрации.

Пользуясь методами Ляпунова, мы можем найти при помощи бесконечных рядов бесчисленное множество других частных решений, остающихся близкими, по крайней мере некоторое время, к одному из известных либрационных решений. Из всех этих частных решений, близких к либрационным (т. е. к лагранжевым и эйлеровым), наибольший интерес для приложений представляют периодические решения, которые можно разыскать при помощи метода Ляпунова (см. § 2, главы III).

Перейдем теперь к разысканию этих периодических решений. Рассмотрим уравнения возмущенного движения вблизи какой-либо из пяти точек либрации (L_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ в виде (5.47), выписывая отдельно члены первого порядка

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}^{(i)}x + p_{12}^{(i)}y + \tilde{X}^{(i)}, \\ y'' + 2x' &= p_{12}^{(i)}x + p_{22}^{(i)}y + \tilde{Y}^{(i)}, \\ z'' &= p^{(i)}z + \tilde{Z}^{(i)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.84}$$

где $\tilde{X}^{(i)}$, $\tilde{Y}^{(i)}$, $\tilde{Z}^{(i)}$ обозначают совокупности членов выше первого порядка относительно x, y и z, а коэффициенты определяются формулами, которые уже приводились выше, но которые все же выпишем еще раз:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11}^{(i)} = 1 + 2A_i, \quad p_{12}^{(i)} = 0, \quad p_{22}^{(i)} = 1 - A_i, \\ &p^{(i)} = 1 - A_i, \qquad A_i = \frac{1-\mu}{\bar{\rho}_i^3} + \frac{\mu}{\bar{\Delta}_i^3}, \end{aligned}\right\} \tag{5.84'}$$

где $i=1, 2, 3$, и

$$\left.\begin{aligned} &p_{11}^{(i)}=\frac{3}{4}, \quad p_{12}^{(i)}=B_i, \quad p_{22}^{(i)}=\frac{9}{4},\\ &p^{(i)}=-1, \quad B_i=(-1)^i\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu), \end{aligned}\right\} \tag{5.84''}$$

где $i=4, 5$.

Так как в круговой классической задаче существует интеграл Якоби, то уравнения (5.84) также допускают интеграл, который можно записать в виде

$$x'^2+y'^2+z'^2=2\Omega+2h, \tag{5.85}$$

где Ω — голоморфная функция x, y и z, разложение которой в ряд по степеням этих величин не содержит членов ниже второго порядка и может быть написано в виде

$$\Omega=\sum_{k=2}^{\infty}\Omega_k(x, y, z), \tag{5.85'}$$

где

$$\Omega_2(x, y, z)=\frac{1}{2}\left[p_{11}^{(i)}x^2+2p_{12}^{(i)}xy+p_{22}^{(i)}y^2+p^{(i)}z^2\right], \tag{5.85''}$$

причем коэффициенты этой квадратичной формы определяются формулами (5.84′) и (5.84″), а Ω_k суть целые однородные функции x, y, z k-й степени ($k\geqslant 3$).

Так как определитель квадратичной формы Ω_2 не равен нулю, то к системе (5.84) применима теорема Ляпунова и, следовательно, каждой паре чисто мнимых корней $\pm\lambda\sqrt{-1}$ характеристического уравнения, соответствующего системе (5.84), отвечает одно периодическое решение этой системы с двумя произвольными постоянными.

Для каждой из прямолинейных точек либрации определяющее уравнение, как было выяснено выше, имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$, $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$, причем можно считать $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$.

Таким образом, если ни одно из отношений λ_1/λ_2, λ_2/λ_1 не есть целое число (что и будет в общем случае, т. е. при произвольно заданном μ), то уравнения (5.84) заведомо будут иметь два периодических решения, каждое из которых содержит две произвольные постоянные.

Для треугольных точек либрации определяющее уравнение имеет только одну пару чисто мнимых корней (когда $1-27\mu(1-\mu)<0$ и эти корни суть $\pm\sqrt{-1}$) или три пары чисто мнимых корней (если $1-27\mu(1-\mu)>0$). Поэтому в первом случае система (5.84) имеет только одно периодическое решение. Во втором случае система (5.84) будет иметь три периодических решения, если чисто мнимые корни $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$, $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$, $\pm\lambda_3\sqrt{-1}$ таковы, что ни одно из отношений λ_i/λ_j $(i, j = 1, 2, 3)$ не есть целое число, что и будет при произвольно заданном μ.

Если $1-27\mu(1-\mu)=0$, то определяющее уравнение имеет двойной нулевой корень и пару чисто мнимых $\pm\sqrt{-i}$, а поэтому в этом случае теорема Ляпунова непосредственно неприменима.

Каждое из упомянутых периодических решений, существование которых установлено при помощи теоремы Ляпунова, может быть фактически найдено в виде бесконечных рядов, расположенных по степеням некоторой произвольной постоянной, абсолютно сходящихся для всякого значения независимой переменной v (а значит, для всякого значения t), пока числовое значение произвольной постоянной не превосходит некоторого отличного от нуля предела.

2. Для нахождения рядов, представляющих периодические решения системы (5.84), близкие к лагранжевым и эйлеровым решениям, т. е. близкие к какой-либо точке либрации в системе Нехвила, мы применим метод Ляпунова непосредственно к уравнениям (5.84), не заботясь о приведении этих уравнений к системе шести уравнений первого порядка, что вовсе и не обязательно.

Пусть $\pm\lambda\sqrt{-1}$ есть какая-либо пара чисто мнимых корней определяющего (характеристического) уравнения, соответствующего системе (5.84).

Положим

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}\left[1+h_2c^2+h_3c^3+\ \ldots\right], \tag{5.86}$$

где c обозначает произвольную постоянную, а h_k — неопределенные коэффициенты. Введем вместо v новую независимую переменную τ посредством подстановки

$$\tau=\frac{2\pi(v-v_0)}{T}. \tag{5.86'}$$

Преобразованные уравнения (5.84) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d\tau^2}-2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{dy}{d\tau}&=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot\left[p_{11}^{(i)}x+p_{12}^{(i)}y+\widetilde{X}^{(i)}\right],\\
\frac{d^2y}{d\tau^2}+2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{dx}{d\tau}&=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot\left[p_{12}^{(i)}x+p_{22}^{(i)}y+\widetilde{Y}^{(i)}\right],\\
\frac{d^2z}{d\tau^2}&=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot\left[p^{(i)}z+\widetilde{Z}^{(i)}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{5.87}$$

Теперь согласно общей теории периодических решений Ляпунова будем искать решение системы (5.87) в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} x &= x^{(1)}c + x^{(2)}c^2 + \ldots + x^{(k)}c^k + \ldots, \\ y &= y^{(1)}c + y^{(2)}c^2 + \ldots + y^{(k)}c^k + \ldots, \\ z &= z^{(1)}c + z^{(2)}c^2 + \ldots + z^{(k)}c^k + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.88}$$

все коэффициенты которых должны быть периодическими функциями переменной τ с общим периодом 2π, представляющимися конечными суммами синусов и косинусов целых кратностей τ.

Так как нам уже известно, что периодические решения такого вида существуют, то ряды (5.88) для каждого значения λ найдутся единственным образом и одновременно определятся однозначно все постоянные h_k.

Для определения коэффициентов рядов (5.88) подставляем их в уравнения (5.87), а затем приравниваем в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях c слева и справа. Это даст нам следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x^{(k)}}{d\tau^2} - \frac{2}{\lambda}\frac{dy^{(k)}}{d\tau} &= \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{11}^{(i)}x^{(k)} + p_{12}^{(i)}y^{(k)} + \widetilde{X}_k^{(i)}\right], \\ \frac{d^2y^{(k)}}{d\tau^2} + \frac{2}{\lambda}\frac{dx^{(k)}}{d\tau} &= \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{12}^{(i)}x^{(k)} + p_{22}^{(i)}y^{(k)} + \widetilde{Y}_k^{(i)}\right], \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= \frac{1}{\lambda^2}\left[p^{(i)}z^{(k)} + \widetilde{Z}_k^{(i)}\right], \end{aligned}\right\} \tag{5.89}$$

где $\widetilde{X}_1^{(i)}$, $\widetilde{Y}_1^{(i)}$, $\widetilde{Z}_1^{(i)}$ равны нулю, а для $k > 1$ величины $\widetilde{X}_k^{(i)}$, $\widetilde{Y}_k^{(i)}$ $\widetilde{Z}_k^{(i)}$ — целые многочлены относительно тех $x^{(j)}$, $y^{(j)}$, $z^{(j)}$, для которых $j < k$ и которые зависят, кроме того, от постоянных $h_2, \ldots, h_{k-1}$. Поэтому уравнения (5.89) определяют последовательно все коэффициенты рядов (5.88) и одновременно все постоянные h_k, которые выбираются так, чтобы получаемые функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ выходили периодическими функциями от τ с общим периодом 2π.

При этом коэффициенты $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, которые определяются из линейных однородных уравнений, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)} &= a\cos\tau + b\sin\tau, \\ y^{(1)} &= a'\cos\tau + b'\sin\tau, \\ z^{(1)} &= a''\cos\tau + b''\sin\tau, \end{aligned}\right\} \tag{5.90}$$

а для $k > 1$ будем иметь выражения вида

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)} &= \sum_{s=0}^{k} [a_{ks} \cos s\tau + b_{ks} \sin s\tau], \\ y^{(k)} &= \sum_{s=0}^{k} [a'_{ks} \cos s\tau + b'_{ks} \sin s\tau], \\ z^{(k)} &= \sum_{s=0}^{k} [a''_{ks} \cos s\tau + b''_{ks} \sin s\tau], \end{aligned}\right\} \tag{5.90'}$$

причем все коэффициенты в формулах (5.90) и (5.90′) — вполне определенные постоянные, зависящие только от коэффициентов разложений правых частей уравнений (5.87).

Мы ограничимся здесь нахождением только первого приближения, т. е. только первых членов рядов (5.88). Более подробное изложение метода Ляпунова мы дадим в главе VII.

Рассмотрим вначале периодические решения, близкие к прямолинейным точкам либрации. Тогда уравнения, определяющие первые коэффициенты рядов (5.88), запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2} - \frac{2}{\lambda}\frac{dy^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda^2}(1 + 2A_i)\, x^{(1)}, \\ &\frac{d^2y^{(1)}}{d\tau^2} + \frac{2}{\lambda}\frac{dx^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda^2}(1 - A_i)\, y^{(1)}, \\ &\frac{d^2z^{(1)}}{d\tau^2} + \frac{1}{\lambda^2} A_i z^{(1)} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.91}$$

где λ может иметь одно из двух значений: λ_1 или λ_2.

Будем считать для определенности, что $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$ — корни характеристического уравнения, соответствующего системе двух первых уравнений (5.91), а $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$ — корни характеристического уравнения для случая последнего уравнения системы (5.92).

Тогда имеем тождественно

$$\lambda_1^4 - (2 - A_i)\lambda_1^2 + (1 + 2A_i)(1 - A_i) \equiv 0 \tag{5.92}$$

и

$$\lambda_2^2 = A_i. \tag{5.92'}$$

Теперь нужно определить решения уравнений (5.91), имеющие вид (5.90). Легко видеть, что $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ этого вида удовлетворяют двум первым уравнениям (5.91), если $b = 0$, $a' = 0$, а a и b' удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \left(1+\frac{1+2A_i}{\lambda^2}\right)a+\frac{2}{\lambda}b'=0,\\ \frac{2}{\lambda}a+\left(1+\frac{1-A_i}{\lambda^2}\right)b'=0, \end{aligned}\right\} \tag{5.93}$$

определитель которых вычисляется по формуле

$$D(\lambda)=\frac{1}{\lambda^4}[\lambda^4-(2-A_i)\lambda^2+(1+2A_i)(1-A_i)]. \tag{5.93'}$$

При $\lambda=\lambda_1$ этот определитель в силу тождества (5.92) равен нулю, а поэтому найдутся не равные одновременно нулю значения a и b', удовлетворяющие равенствам (5.93).

Мы можем положить, например,

$$a=-2\lambda_1, \quad b'=\lambda_1^2+1+2A_i. \tag{5.94}$$

Теперь заметим, что при $\lambda=\lambda_1$ третьему из уравнений (5.91) удовлетворяет функция $z^{(1)}$ вида (5.90) только при $a''=b''=0$, так что в этом решении $z^{(1)}=0$.

Но так как каждый член разложения $Z^{(i)}$ содержит множителем z, отсюда следует, что в рассматриваемом периодическом решении мы имеем тождественно $z=0$.

Таким образом, при $\lambda\equiv\lambda_1$ периодическое решение, близкое к прямолинейной точке либрации, определится формулами

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)}&=ac\cos\tau+\ \ldots,\\ y^{(1)}&=b'c\sin\tau+\ \ldots,\\ z^{(1)}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{5.95}$$

и соответствующая периодическая орбита есть п л о с к а я к р и в а я, заведомо з а м к н у т а я.

Уравнение этой периодической орбиты в прямоугольных координатах мы получим, исключая τ из равенств (5.95).

В общем виде произвести это исключение затруднительно, но если ограничиться только членами первого порядка относительно произвольной постоянной c, то результат будет очень простым.

Действительно, производя исключение τ из равенств (5.95) при этом условии, мы найдем

$$\frac{(x^{(1)})^2}{(ac)^2}+\frac{(y^{(1)})^2}{(b'c)^2}=1. \tag{5.95'}$$

Отсюда следует, что периодическая орбита вблизи всякой прямолинейной точки либрации при $\lambda=\lambda_1$ близка к эллипсу, центр которого совпадает с точкой либрации, одна ось совпадает с осью абсцисс (прямая, проходящая через точки M_0 и M_1), а другая перпендикулярна к этой оси.

Из (5.94) следует, что для всякой точки либрации L_i ($i = 1, 2, 3$) мы имеем $|a| < b'$, так что большая ось каждого из этих эллипсов перпендикулярна к оси абсцисс.

Заметим, что, изменяя c (оставляя его достаточно малым), мы получим около каждой эйлеровой точки (L_i) бесчисленное множество эллипсов (5.95′). Эксцентриситеты всех этих эллипсов, принадлежащих одному и тому же семейству, одинаковы. Точно так же одинаковы и периоды всех орбит, принадлежащих к одному и тому же семейству, так как из (5.86), пренебрегая членами, порядок которых выше первого относительно c, мы имеем

$$T \cong \frac{2\pi}{\lambda_1}. \tag{5.95''}$$

Перейдем к рассмотрению второго периодического решения, близкого к прямолинейной точке либрации, для чего положим в уравнениях (5.91) $\lambda = \lambda_2$.

Тогда в силу (5.92) сразу видим, что выражение вида (5.90) для функции $z^{(1)}$ будет удовлетворять третьему уравнению системы (5.91) при любых вещественных значениях a'' и b''. Так как нам нужно найти только какое-нибудь частное решение системы (5.91), то мы можем выбрать постоянные a'' и b'' совершенно произвольно, например, можем положить $a'' = 1$ и $b'' = 0$.

Но определитель (5.93) имеет при $\lambda = \lambda_2$ значение

$$D(\lambda_2) = \frac{1 - A_i}{A_i^2} \neq 0,$$

а поэтому функции $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ вида (5.90) удовлетворяют уравнениям (5.91) только при $a = b = a' = b' = 0$.

Поэтому периодическое решение, близкое к прямолинейной точке либрации, при $\lambda = \lambda_2$ представится в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 + \ldots, \\ y &= 0 + \ldots, \\ z &= c\cos\tau + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.96}$$

где невыписанные члены выше первого порядка относительно постоянной c.

Соответствующая пространственная периодическая орбита близка, очевидно, к отрезку прямой ($-c$, $+c$), проходящей через точку (L_i) перпендикулярно к плоскости (xOy).

Периоды этих решений для всех орбит одного и того же семейства одинаковы, и мы имеем

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_2} + \ldots \tag{5.96'}$$

с точностью до членов первого порядка включительно.

3. Перейдем теперь к рассмотрению периодических решений, близких к треугольным точкам либрации (L_4) и (L_5).

Уравнения, определяющие первые коэффициенты рядов (5.88), напишутся теперь следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}-\frac{2}{\lambda}\frac{dy^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{3}{4}x^{(1)}+B_iy^{(1)}\right],\\ &\frac{d^2y^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{2}{\lambda}\frac{dx^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left[B_ix^{(1)}+\frac{9}{4}y^{(1)}\right],\\ &\frac{d^2z^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda^2}z^{(1)}=0 \qquad (i=4,5). \end{aligned}\right\} \tag{5.97}$$

Подставляя в первые два уравнения вместо $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ их выражения из (5.90), мы найдем, что коэффициенты этих выражений должны удовлетворять условиям

$$\left.\begin{aligned} &\left(1+\frac{3}{4\lambda^2}\right)a+\frac{B_i}{\lambda^2}a'+\frac{2}{\lambda}b'=0,\\ &\left(1+\frac{3}{4\lambda^2}\right)b-\frac{2}{\lambda}a'+\frac{B_i}{\lambda^2}b'=0,\\ &\frac{B_i}{\lambda^2}a-\frac{2}{\lambda}b+\left(1+\frac{9}{4\lambda^2}\right)a'=0,\\ &\frac{2}{\lambda}a+\frac{B_i}{\lambda^2}b+\left(1+\frac{9}{4\lambda^2}\right)b'=0 \end{aligned}\right\} \quad (i=4,\ 5). \tag{5.98}$$

Если теперь $1-27\mu(1-\mu)<0$, то существует только одно периодическое решение, так как определяющее уравнение имеет только одну пару чисто мнимых корней $\pm\sqrt{-1}$. В этом случае $\lambda=1$ и это периодическое решение определяется из третьего уравнения системы (5.97), причем, так как нам нужно иметь только частное решение, то можно взять $z^{(1)}=\cos\tau$, а все коэффициенты системы первых двух уравнений (5.90) нужно положить равными нулю. Тогда уравнения (5.98) удовлетворяются. Периодическое решение системы (5.97) будет иметь вид такой же, как и (5.96), но только вблизи точек либрации (L_4) и (L_5). Периодическая орбита, соответствующая этому периодическому решению, будет близка к отрезку $(-c, +c)$ прямой, параллельной оси OZ, с центром в (L_4) или в (L_5).

Если $1-27\mu(1-\mu)>0$, то определяющее уравнение имеет три пары чисто мнимых корней:

$$\pm\lambda_1\sqrt{-1},\quad \pm\lambda_2\sqrt{-1},\quad \pm\lambda_3\sqrt{-1}.$$

Будем считать, для определенности, что третья пара корней соответствует третьему уравнению (5.97). Тогда $\lambda_3=1$ и для этого уравнения опять можно взять $z^{(1)}=\cos\tau$. Но определитель системы (5.98), как нетрудно проверить, не равен нулю при

$\lambda = 1$ и, следовательно, эта система имеет только нулевое решение. Поэтому периодическое решение опять имеет вид (5.96) и может отличаться от него только членами порядка выше первого относительно c.

Для двух других пар корней $\pm \lambda_1 \sqrt{-1}$ и $\pm \lambda_2 \sqrt{-1}$, следовательно, частное решение третьего из уравнений (5.97) есть $z^{(1)} = 0$. Но тогда (так же как и в соответствующем случае для прямолинейных точек либрации) координата z равна нулю тождественно, и орбиты каждого из двух семейств периодических решений, соответствующих $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, суть плоские кривые, лежащие в плоскости (xOy). Чтобы найти в первом приближении уравнения этих кривых, нужно определить постоянные a, b, a', b' из уравнений (5.98), причем одну из этих величин можно выбрать произвольно и найти остальные три из трех каких-либо из уравнений (5.98).

Таким образом, периодические решения, соответствующие $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, определятся тогда следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= c(a\cos\tau + b\sin\tau) + \ldots, \\ y &= c(a'\cos\tau + b'\sin\tau) + \ldots, \\ z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.99}$$

и все орбиты одного и того же семейства имеют одинаковый период, равный (с точностью до членов первого порядка)

$$\frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad \frac{2\pi}{\lambda_2}.$$

Приближенное уравнение орбиты получим исключением τ из равенств (5.99), отбрасывая в них все члены порядка выше первого относительно параметра c, что дает

$$\frac{(b'x - by)^2 + (a'x - ay)^2}{c^2(ab' - a'b)^2} = 1. \tag{5.100}$$

Очевидно, что все эти орбиты являются эллипсами с центром в треугольной точке либрации (L_4) или (L_5).

Легко видеть, что все эллипсы одного и того же семейства имеют общий эксцентриситет и общие главные оси.

Глава VI

ЗАДАЧА ХИЛЛА

В предыдущей главе мы рассмотрели простые частные решения ограниченной задачи трех тел, которые оказываются периодическими для случая эллиптической (а следовательно, и круговой!) задачи. Мы установили также, что круговая ограниченная задача имеет бесчисленное множество периодических решений, близких к либрационным.

Эти решения, представляемые сходящимися периодическими рядами, имеют важное теоретическое значение, но до сих пор не играли большой роли при исследовании движений реальных небесных тел. Однако можно надеяться, что в современной небесной механике, а именно в том ее отделе, который занимается изучением движений искусственных небесных тел, либрационные движения и близкие к ним периодические орбиты найдут надлежащее приложение и будут эффективно использованы *).

Теперь мы перейдем к рассмотрению других периодических решений, представляющих движения пассивной массы, близкие к одной из конечных масс.

Такие решения получил впервые Хилл, рассматривая задачу о движении естественного спутника Земли, т. е. Луны, но та же методика может быть с успехом применена и к изучению движений близких спутников других планет, а также к изучению движений искусственных спутников Земли, Луны или какой-либо другой планеты Солнечной системы.

Соответствующую задачу мы называем для краткости задачей Хилла. Мы изложим здесь вывод основных уравнений задачи Хилла и метод Ляпунова для нахождения периодических решений этой задачи в виде абсолютно сходящихся периодических рядов.

---

*) Первое издание этой книги вышло в 1964 г. С тех пор появилось множество работ и в нашей стране и за рубежом, посвященных приложениям теории, изложенной в главе V, к конкретным задачам теории движения искусственных небесных тел. Основные иследования в этой области будут изложены в следующей нашей книге.

§ 1. Основные уравнения задачи Хилла

1. В своей теории движения Луны Хилл исходил из уравнений движения плоской ограниченной круговой задачи трех тел, для которой, считая расстояние между двумя конечными массами весьма большим, знаменитый астроном вывел удобные приближенные уравнения, частное периодическое решение которых затем и разыскивал.

Но предположение о равенстве нулю эксцентриситета кеплеровой орбиты точки M_1 относительно M_0 не играет никакой роли при выводе основных уравнений задачи Хилла. Поэтому мы предпочитаем вывести эти уравнения в несколько более общей форме, исходя из уравнений любой ограниченной задачи, данных Нехвилом.

Итак, рассмотрим задачу о движении пассивной массы под действием ньютоновского притяжения двух конечных масс, m_0 и m_1, движущихся вокруг общего центра масс O по подобным кеплеровским орбитам. Координаты точки M_2 в системе координат Нехвила, но с началом в центре масс O, обозначим теперь через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$. Тогда уравнения движения точки M_2 (с пассивной массой) напишутся, как легко видеть, если перейти в (5.28) к системе с началом в O и с прежними направлениями осей, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\xi}}{dv^2} - 2\frac{d\bar{\eta}}{dv} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\bar{\xi}}, \\ \frac{d^2\bar{\eta}}{dv^2} + 2\frac{d\bar{\xi}}{dv} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\bar{\eta}}, \\ \frac{d^2\bar{\zeta}}{dv^2} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\bar{\zeta}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где силовая функция $\bar{\Omega}$ определяется формулой

$$\bar{\Omega} = \bar{r}\left\{ -\frac{1}{2}e\cos v\cdot\bar{\zeta}^2 + \frac{1}{2}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) + \gamma\cdot\bar{W} \right\}, \tag{6.2}$$

в которой

$$\bar{r} = \frac{1}{1 + e\cos v}, \quad \gamma = \frac{p^4}{c^2} = \frac{p^3}{f(m_0 + m_1)}$$

и

$$\bar{W} = f\left\{ \frac{m_0}{\bar{r}_0} + \frac{m_1}{\bar{r}_1} \right\}, \tag{6.3}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_0^2 &= (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2, \\ \bar{r}_1^2 &= (\bar{\xi} - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2, \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

а

$$\bar{\xi}_0 = -\frac{pm_1}{m_0 + m_1}, \quad \bar{\xi}_1 = \frac{pm_0}{m_0 + m_1}, \quad \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_0 = p.$$

Если во всех этих формулах положить $e=0$, то получим уравнения движения точки M_2 в круговой ограниченной задаче, а если выбрать начальные условия таким образом, чтобы во все время движения было $\bar{\zeta}=0$, то третье из уравнений (6.1) удовлетворится тождественно и оставшиеся первые два уравнения составят уравнения движения в плоской ограниченной задаче.

Функцию $\bar{\Omega}$ можно представить в несколько ином, более удобном виде. Замечая, что из (6.4) мы имеем

$$m_0\bar{r}_0^2+m_1\bar{r}_1^2=(m_0+m_1)(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2+\bar{\zeta}^2)+\frac{m_0m_1p^2}{m_0+m_1}, \tag{6.4'}$$

мы приведем выражение (6.2) к виду

$$\bar{\Omega}=-\frac{m_0m_1p^2\bar{r}}{2(m_0+m_1)^2}+\tilde{\Omega}, \tag{6.5}$$

где

$$\tilde{\Omega}=-\frac{1}{2}\bar{\zeta}^2+\frac{f\gamma\bar{r}}{2}\left\{\frac{m_0\bar{r}_0^2}{p^3}+\frac{m_1\bar{r}_1^2}{p^3}+\frac{2m_0}{\bar{r}_0}+\frac{2m_1}{\bar{r}_1}\right\}. \tag{6.5'}$$

Так как член, не зависящий от координат точки M_2, все равно исчезает при дифференцировании, то вместо всей функции $\bar{\Omega}$ мы можем взять функцию $\tilde{\Omega}$.

Функция $\tilde{\Omega}$ имеет еще более простое выражение в случае плоской круговой задачи. В самом деле, тогда $\bar{\zeta}\equiv 0$, $\bar{r}=1$, $p=a$, $\gamma=1/n^2$, и мы получим

$$\tilde{\Omega}=\frac{f}{2n^2}\left\{\frac{m_0\bar{r}_0^2}{a^3}+\frac{m_1\bar{r}_1^2}{a^3}+\frac{2m_0}{\bar{r}_0}+\frac{2m_1}{\bar{r}_1}\right\}. \tag{6.5''}$$

Возвращаясь пока к общему случаю, рассмотрим задачу о движении «нулевой массы» в непосредственной окрестности точки M_1, считая, как и ранее, что масса m_1 этой точки есть меньшая из двух конечных масс. Чтобы отнести движение точки M_2 к точке M_1 преобразуем уравнения (6.1) подстановкой

$$\bar{\xi}=x+\bar{\xi}_1, \qquad \bar{\eta}=y, \qquad \bar{\zeta}=z. \tag{6.6}$$

В новых переменных уравнения движения точки M_2 вблизи точки M_1 могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dv^2}-2\frac{dy}{dv}&=\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dv^2}+2\frac{dx}{dv}&=\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dv^2}&=\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

где функция Ω определится формулой (6.5) с заменой старых координат их выражениями (6.6).

Положим для упрощения

$$r = \bar{r}_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{6.8}$$

где r — радиус-вектор точки M_2 относительно M_1, и обозначим через R расстояние от точки M_2 до большей массы M_0, т. е. положим

$$R = \bar{r}_0 = \sqrt{(x+p)^2 + y^2 + z^2}. \tag{6.8'}$$

Тогда выражение для функции $\tilde{\Omega}$ напишется в виде

$$\tilde{\Omega} = -\frac{1}{2} z^2 + \frac{f\gamma\bar{r}}{2} \left\{ \frac{m_0 R^2}{p^3} + \frac{m_1 r^2}{p^3} + \frac{2m_0}{R} + \frac{2m_1}{r} \right\} \tag{6.9}$$

и соответственно для случая круговой плоской задачи

$$\tilde{\Omega} = \frac{f}{2n^2} \left\{ \frac{m_0 R^2}{a^3} + \frac{m_1 r^2}{a^3} + \frac{2m_0}{R} + \frac{2m_1}{r} \right\}. \tag{6.9'}$$

Напомним, что n обозначает здесь постоянную угловую скорость точки M_1 относительно M_0, а a есть радиус круговой орбиты точки M_1.

2. Ставя своей целью изучение движения точки M_2 в непосредственной окрестности точки M_1, будем теперь считать, что радиус-вектор r движущейся точки всегда остается меньше расстояния p (в системе координат Нехвила!) между двумя конечными массами.

Тогда обратное расстояние R^{-1} точки M_2 до большей массы M_0 можно разложить в ряд многочленов Лежандра.

В самом деле, мы можем написать

$$R^2 = r^2 + 2px + p^2, \tag{6.10}$$

откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{p}\left[1 + 2\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{p} + \left(\frac{r}{p}\right)^2\right]. \tag{6.10'}$$

Так как всегда $|x| \leqslant r$ и, как предположено, $r < p$, то по свойствам производящей функции многочленов Лежандра мы имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{p}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right), \tag{6.11}$$

где P_s обозначает s-й многочлен Лежандра.

Рассмотрим в выражении (6.9) члены, имеющие множителем массу m_0. Заменяя R^2 его выражением (6.10), подставим вместо R^{-1} разложение (6.11), выделив в последнем члены нулевого, первого и второго порядков.

Так как

$$P_0\left(\frac{x}{r}\right)=1, \quad P_1\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{x}{r}, \quad P_2\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2-\frac{1}{2},$$

то мы получим после упрощений и приведений

$$\frac{R^2}{p^3}+\frac{2}{R}=\frac{3}{p}+\frac{3x^2}{p^3}+\frac{2}{p}\sum_{s=3}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right).$$

Подставим полученное выражение в формулу (6.9), отбросив притом постоянный член $3/p$, который все равно исчезнет при дифференцировании функции $\tilde{\Omega}$.

Мы получим

$$\tilde{\Omega}=-\frac{1}{2}z^2+\frac{f\gamma\bar{r}}{2}\left\{\frac{3m_0x^2}{p^3}+\frac{m_1(x^2+y^2+z^2)}{p^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{2m_1}{r}+\frac{2m_0}{p}\sum_{s=3}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right)\right\}.$$

Последнее выражение можно также представить в следующем виде:

$$\tilde{\Omega}=\frac{f\gamma\bar{r}}{2}\left\{\frac{3(m_0+m_1)x^2}{p^3}-\frac{2m_1x^2}{p^3}+\frac{m_1(y^2+z^2)}{p^3}+\frac{2m_1}{r}\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}z^2+f\gamma\Omega^*, \qquad (6.12)$$

где положено еще

$$\Omega^*=\frac{m_0\bar{r}}{p}\sum_{s=3}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right). \qquad (6.12')$$

Заменяя теперь в членах, имеющих делителем p^3, постоянную γ ее выражением, мы можем еще написать формулу (6.12) следующим образом:

$$\tilde{\Omega}=\frac{\bar{r}}{2}\left\{3x^2-\frac{2m_1}{m_0+m_1}x^2+\frac{m_1}{m_0+m_1}(y^2+z^2)+\frac{2f\gamma m_1}{r}\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}z^2+f\gamma\Omega^*. \qquad (6.13)$$

Формула (6.12) или (6.13) представляет функцию $\tilde{\Omega}$ в виде суммы двух частей — главной и дополнительной. Главная часть представляет собой сумму однородного многочлена второй степени относительно координат x, y, z и неголоморфного члена $2f\gamma m_1/r$, имеющего разрыв второго рода в начале координат.

Дополнительная часть, т. е. функция $f\gamma\Omega^*$, представляет собой ряд, расположенный по степеням параметра $\alpha=\frac{1}{p}$, коэффициентами которого являются целые многочлены относительно координат x, y, z.

Действительно, разложение функции Ω^* можно написать в виде

$$\Omega^* = \frac{m_0\bar{r}}{2}\sum_{s=3}^{\infty}(-1)^s \alpha^{s+1}P_s^*(x,\ y,\ z), \tag{6.14}$$

где

$$P_s^*(x,\ y,\ z) = r^s P_s\left(\frac{x}{r}\right). \tag{6.14'}$$

Но многочлен Лежандра определяется формулой

$$P_s\left(\frac{x}{r}\right) = \sum_{\sigma=0}^{E(s/2)} P_{s\sigma}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^{s-2\sigma},$$

где $P_{s\sigma}$ — числовые коэффициенты. Поэтому

$$P_s^*(x,\ y,\ z) = \sum_{\sigma=0}^{E(s/2)} P_{s\sigma}\cdot x^{s-2\sigma}(x^2+y^2+z^2)^\sigma$$

и, стало быть, есть однородный многочлен степени s относительно координат точки M_2.

Заменяя теперь в уравнениях (6.7) функцию $\tilde{\Omega}$ ее выражением (6.13), мы представим уравнения, определяющие движение «нулевой массы» вблизи точки M_1 в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} + \bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} - 3 + \frac{2m_1}{m_0+m_1}\right]x &= f\gamma\frac{\partial\Omega^*}{\partial x},\\
\frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} + \bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} - \frac{m_1}{m_0+m_1}\right]y &= f\gamma\frac{\partial\Omega^*}{\partial y},\\
\frac{d^2z}{dv^2} + \bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} + \frac{1}{\bar{r}} - \frac{m_1}{m_0+m_1}\right]z &= f\gamma\frac{\partial\Omega^*}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Согласно сказанному выше, правые части этих уравнений — бесконечные ряды, расположенные по степеням параметра α, коэффициентами которых служат целые однородные многочлены относительно координат движущейся точки.

Эти ряды можно рассматривать как начинающиеся с четвертой степени параметра α (если считать γ фиксированной постоянной) либо как начинающиеся с первой степени α, если учесть зависимость γ от α и положить $f\gamma = (m_0+m_1)^{-1}\cdot\alpha^{-3}$.

Предполагая расстояние между конечными массами достаточно большим, т. е. считая параметр α достаточно малым, мы можем искать решение уравнений (6.15) в виде рядов, расположенных по степеням этого параметра, т. е. в виде

$$x=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s x^{(s)},\quad y=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s y^{(s)},\quad z=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s z^{(s)}. \tag{6.16}$$

Очевидно, что свободные члены этих рядов, составляющие первое приближение задачи, определятся уравнениями, которые выведем из (6.15), отбрасывая в последних все члены, содержащие параметр α, т. е. заменяя правые части этих уравнений нулями.

3. Уравнения первого приближения, дающие вместе с тем некоторое приближенное решение задачи Хилла, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dv^2}-2\frac{dy}{dv}+\bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-3+\frac{2m_1}{m_0+m_1}\right]x=0,\\ \frac{d^2y}{dv^2}+2\frac{dx}{dv}+\bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-\frac{m_1}{m_0+m_1}\right]y=0,\\ \frac{d^2z}{dv^2}+\bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}+\frac{1}{\bar{r}}-\frac{m_1}{m_0+m_1}\right]z=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Эти уравнения в свою очередь содержат параметр, а именно эксцентриситет e орбиты точки M_1.

Для приложений к конкретным задачам астрономии особенно интересны те случаи, в которых орбита точки M_1 есть эллипс, эксцентриситет которого не очень велик.

Тогда коэффициенты при x, y, z в уравнениях (6.17) можно рассматривать как ряды, расположенные по степеням эксцентриситета e, абсолютно сходящиеся, пока e не превышает предела Лапласа.

Чтобы получить первое приближение в этой (уже приближенной!) задаче, нужно положить в уравнениях (6.17) e равным нулю, т. е. рассмотреть первое приближение уравнений круговой задачи.

Эти уравнения первого приближения напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dv^2}-2\frac{dy}{dv}+\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-3+\frac{2m_1}{m_0+m_1}\right]x=0,\\ \frac{d^2y}{dv^2}+2\frac{dx}{dv}+\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-\frac{m_1}{m_0+m_1}\right]y=0,\\ \frac{d^2z}{dv^2}+\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}+\frac{m_0}{m_0+m_1}\right]z=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.17$'$}$$

Так как эти уравнения можно рассматривать, как только что замечено, как первое приближение круговой задачи, то мы можем получить один первый интеграл этих уравнений.

Действительно, если в уравнениях (6.7) положить e равным нулю, то эти уравнения, как не содержащие явно независимой переменной, имеют интеграл Якоби

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = 2\tilde{\Omega} + 2h. \tag{6.18}$$

Заменяя в равенстве (6.18) функцию $\tilde{\Omega}$ ее главной частью, мы и получим интеграл системы (6.17′), который, следовательно, напишется в виде

$$V^2 = \left\{3x^2 - \frac{2m_1}{m_0 + m_1}x^2 + \frac{m_1(y^2 + z^2)}{m_0 + m_1} + \frac{2f\gamma m_1}{r}\right\} - z^2 + 2h. \tag{6.18′}$$

Предположим теперь, что масса m_1 точки M_1 весьма мала по сравнению с массой m_0 точки M_0.

Тогда мы можем пренебречь в уравнениях (6.17) членами, содержащими отношение m_1 к сумме масс, а в последнем из этих уравнений заменить второе слагаемое в скобках единицей. Тогда уравнения еще более упростятся, и мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} + \left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} - 3\right]x = 0,\\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} + \frac{f\gamma m_1}{r^3}y = 0,\\ \frac{d^2z}{dv^2} + \left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} + 1\right]z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.17″}$$

а интеграл (6.18′) примет вид

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = 3x^2 - z^2 + \frac{2f\gamma m_1}{r} + 2h. \tag{6.18″}$$

В уравнениях (6.17) и (6.18) независимая переменная $v = nt$, где n — угловая скорость движения точки M_1 по круговой орбите, причем

$$n^2 = \frac{f(m_0 + m_1)}{a^3}. \tag{6.19}$$

С другой стороны, при $e = 0$ мы имеем

$$\gamma = \frac{1}{n^2}. \tag{6.19′}$$

Имея в виду эти соотношения и переходя в уравнениях движения к времени t как независимой переменной, мы приведем эти уравнения к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} + \frac{\mu x}{r^3} = 3n^2x,\\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \frac{\mu y}{r^3} = 0,\\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = -n^2z, \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

где положено еще для краткости $\mu = fm_1$.

Интеграл (6.18″) напишется тогда в виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=3n^2x^2-n^2z^2+\frac{2\mu}{r}+2h. \qquad (6.21)$$

Рассматривая, наконец, плоскую задачу, мы будем считать, что $z\equiv 0$, вследствие чего система (6.20) приведется к классическому виду системы Хилла

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}+\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{3/2}}&=3n^2x,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{3/2}}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

с первым интегралом

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=3n^2x^2+\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}+2h. \qquad (6.23)$$

Уравнения (6.22) определяют некоторое промежуточное движение точки M_2 и кладутся Хиллом в основу построенной им теории движения Луны.

Однако Хилл ищет не общее решение этих уравнений, а некоторое частное, содержащее две произвольные постоянные и удовлетворяющее условиям периодичности.

Такое периодическое решение системы (6.22) Хилл ищет в виде бесконечных тригонометрических рядов вида

$$\left.\begin{aligned}x&=A_0\cos n_1(t-t_0)+A_1\cos 3n_1(t-t_0)+A_2\cos 5n_1(t-t_0)+\ldots,\\ y&=B_0\sin n_1(t-t_0)+B_1\sin 3n_1(t-t_0)+B_2\sin 5n_1(t-t_0)+\ldots,\end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

где t_0 и n_1 — произвольные постоянные, а A_s и B_s — постоянные коэффициенты, определяемые как функции n и n_1 из условия задачи.

Хилл дает оригинальный метод для определения коэффициентов рядов (6.24), рассматривая бесконечную систему уравнений, которыми эти коэффициенты определяются. Однако Хилл вовсе не касается вопроса о сходимости полученных им рядов, которые определяют промежуточную орбиту Луны, называемую в астрономии *вариационной кривой.*

Впервые доказательство сходимости рядов Хилла дал А. М. Ляпунов, который вместе с тем применил свой собственный метод построения рядов Хилла.

Так как метод Хилла уже неоднократно излагался в учебниках, а мемуар А. М. Ляпунова до сих пор мало известен, то мы изложим здесь только результаты А. М. Ляпунова с некоторыми дополнениями, которые сделал Г. А. Мерман.

§ 2. Метод Ляпунова решения задачи Хилла

1. Итак, рассмотрим уравнения (6.22), которые прежде всего преобразуем к новой независимой переменной τ при помощи подстановки

$$\tau = n_1 (t - t_0), \tag{6.25}$$

где, как уже отмечено, t_0 и n_1 — две произвольные постоянные.

Если мы положим, сверх того,

$$\frac{n}{n_1} = m, \quad \frac{\mu}{n_1^2} = k, \tag{6.25'}$$

то преобразованные уравнения примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} + k\frac{x}{r^3} = 3m^2x, \\ &\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} + k\frac{y}{r^3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

В эти уравнения Ляпунов вводит искусственным образом новый параметр λ, заменяя уравнения (6.26) следующими:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2x + k\frac{x}{r^3} = \frac{3}{2}\lambda x, \\ &\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2y + k\frac{y}{r^3} = -\frac{3}{2}\lambda y. \end{aligned}\right\} \tag{6.26'}$$

Таким образом, система (6.26) получается из системы (6.26′), если мы положим в последней $\lambda = m^2$.

Уравнения (6.26′) мы и будем теперь рассматривать вместо уравнений (6.26), причем будем иметь в виду, что в окончательном результате нужно будет положить $\lambda = m^2$.

Если мы положим в уравнениях (6.26) $\lambda = 0$, то получим уравнения, которым можно удовлетворить, полагая

$$x = a\cos\tau, \qquad y = a\sin\tau, \tag{6.27}$$

где a — постоянная, определяемая равенством *)

$$\frac{k}{a^3} = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2. \tag{6.27'}$$

Возвращаясь теперь к уравнениям (6.26′), в которых λ будем предполагать не превосходящим по числовой величине некоторого предела, будем искать такое решение этих уравнений,

*) Постоянная a, разумеется, не совпадает с расстоянием между конечными массами в круговой задаче. Впрочем, последнее расстояние не входит в уравнения (6.22), которые выводятся из уравнений круговой задачи при $\overline{M_0M_1} = a = \infty$.

в которых x и y были бы периодическими функциями τ с общим периодом 2π, обращающимися при $\lambda = 0$ в (6.27).

Предварительно сделаем еще одно преобразование, вводя вместо x и y комплексные сопряженные переменные u и v подстановкой Хилла

$$u = x + iy, \quad v = x - iy \qquad (i = \sqrt{-1}). \tag{6.28}$$

Уравнения, определяющие новые переменные, напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\tau^2} + 2mi\frac{du}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2u + \frac{ku}{(uv)^{3/2}} &= \frac{3}{2}\lambda v, \\ \frac{d^2v}{d\tau^2} - 2mi\frac{dv}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2v + \frac{kv}{(uv)^{3/2}} &= \frac{3}{2}\lambda u \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

и при $\lambda = 0$ имеют частное решение, соответствующее (6.27), определяемое формулами ($e = 2{,}7182\ldots$)

$$u = ae^{i\tau}, \quad v = ae^{-i\tau} \qquad (i = \sqrt{-1}). \tag{6.30}$$

Так как нашей ближайшей целью является нахождение решения системы (6.29), близкого к (6.30), то для большего удобства введем, следуя Ляпунову, новые зависимые переменные p и q подстановкой

$$u = a(1-p)e^{i\tau}, \quad v = a(1-q)e^{-i\tau}. \tag{6.31}$$

Тогда, как легко проверить, мы получим для определения функций p и q следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p}{d\tau^2} + 2(1+m)i\frac{dp}{d\tau} + l(1-p) - l(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}} = \\ &\qquad\qquad\qquad = \frac{3}{2}\lambda(q-1)e^{-2i\tau}, \\ &\frac{d^2q}{d\tau^2} - 2(1+m)i\frac{dq}{d\tau} + l(1-q) - l(1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}} = \\ &\qquad\qquad\qquad = \frac{3}{2}\lambda(p-1)e^{+2i\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

где положено вдобавок для сокращения

$$l = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2. \tag{6.33}$$

Уравнения (6.32) имеют при $\lambda = 0$ решение $p = q = 0$, соответствующее решению (6.30) системы (6.29), а поэтому нашей задачей является нахождение решения системы (6.32) при $\lambda \neq 0$ и обращающегося в нулевое решение, когда λ делается нулем.

Считая, что числовые значения величин p и q остаются всегда меньшими единицы, мы можем разложить функции

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}}, \quad (1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}}$$

в ряды, расположенные по целым положительным степеням p и q. Выполняя эти разложения, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} (1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}} &= 1+\frac{1}{2}p+\frac{3}{2}q+R_p, \\ (1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}q+R_q, \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

где R_p и R_q обозначают совокупности членов выше первого измерения.

При помощи формул (6.34) уравнения (6.32) приведутся к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2p}{d\tau^2}+2(1+m)i\frac{dp}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p+q) &= \frac{3}{2}\lambda(q-1)e^{-2i\tau}+lR_p, \\ \frac{d^2q}{d\tau^2}-2(1+m)i\frac{dq}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p+q) &= \frac{3}{2}\lambda(p-1)e^{+2i\tau}+lR_q. \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Для этих уравнений мы будем теперь искать периодическое решение с периодом 2π, исчезающее при $\lambda=0$, и прежде всего покажем, что при достаточно малом $|\lambda|$ функции p и q в этом решении можно определить рядами, расположенными по степеням λ и содержащими только одну произвольную постоянную.

2. Действительно, пусть

$$p_0,\ q_0,\ p_0',\ q_0' \tag{6.35$'$}$$

— начальные значения переменных Ляпунова, соответствующие $\tau=0$, т. е. $t=t_0$ (штрихи здесь означают дифференцирование по переменной τ).

При $\lambda=0$ мы имеем решение, для которого все начальные значения (6.35′) также нули.

Поэтому, когда модули величин

$$p_0,\ q_0,\ p_0',\ q_0',\ \lambda \tag{6.35$''$}$$

достаточно малы, на основании общей теоремы Ляпунова — Пуанкаре функции p и q, удовлетворяющие уравнениям (6.35), и их производные p', q' можно представить рядами, расположенными по целым положительным степеням величин (6.35″), абсолютно сходящимися для всех значений τ, лежащих между нулем и некоторым пределом T, который уменьшением модулей величин (6.35″) может быть сделан как угодно большим.

Допустим, что таким образом мы сделали $T > 2\pi$. Тогда упомянутыми рядами мы можем воспользоваться для вычисления значений функций p, q, p', q' для значения $\tau = 2\pi$. Пусть

$$\bar{p} = p(2\pi), \quad \bar{q} = q(2\pi), \quad \bar{p}' = p'(2\pi), \quad \bar{q}' = q'(2\pi).$$

Составляя тогда уравнения

$$\bar{p} = p_0, \quad \bar{q} = q_0, \quad \bar{p}' = p_0', \quad \bar{q}' = q_0', \tag{6.36}$$

мы получим необходимые и достаточные условия того, чтобы функции p и q, определяемые уравнениями (6.35), были периодическими с периодом 2π.

Тогда наша задача приводится к исследованию уравнений (6.36), в которых подлежащими определению неизвестными являются начальные условия (6.35′).

Но нетрудно показать, что уравнения (6.36) не все различны и что одно из них есть следствие трех остальных.

Действительно, уравнения (6.35) получились после ряда преобразований из системы (6.22), которая имеет один первый интеграл (6.23). Проделывая с этим интегралом те же преобразования, мы выведем также некоторый первый интеграл системы (6.35). Этот интеграл можно представить в виде

$$\begin{gathered} 2(1+m)(p+q) - i(p'-q') + \\ + \frac{3}{4}\lambda\left[(1-p)^2 e^{2i\tau} + (1-q)^2 e^{-2i\tau}\right] + \ldots = \text{const}, \end{gathered} \tag{6.37}$$

где не выписаны члены выше второго порядка относительно переменных Ляпунова.

Подставляя сюда вместо переменных Ляпунова их выражения в виде рядов, расположенных по степеням величин (6.35″) и полагая затем $\tau = 2\pi$, мы получим следующее тождество:

$$\begin{aligned} 2(1+m)(\bar{p}+\bar{q}) - i(\bar{p}'-\bar{q}') + \frac{3}{4}\lambda\left[(1-\bar{p})^2 + (1-\bar{q}^2)\right] + \ldots = \\ = 2(1+m)(p_0+q_0) - i(p_0'-q_0') + \\ + \frac{3}{4}\lambda\left[(1-p_0)^2 + (1-q_0)^2\right] + \ldots \end{aligned} \tag{6.37′}$$

относительно величин (6.35′).

Отсюда ясно, что если мы удовлетворим каким-либо трем из уравнений (6.36), то четвертое удовлетворится само собой.

Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением трех следующих уравнений:

$$\bar{p} = p_0, \quad \bar{p}' = p_0', \quad \bar{q}' = q_0'. \tag{6.38}$$

Посмотрим, что могут дать эти уравнения. Обращаясь к уравнениям (6.35), мы замечаем, что если в них отбросить все члены выше первого порядка относительно p и q, а также члены, зависящие от λ, то эти уравнения превратятся в линейные с постоянными коэффициентами, общее решение которых определится формулами

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{3}{2}lC_1e^{+\varkappa i\tau} - \left[\varkappa^2+2(1+m)\varkappa+\frac{3}{2}l\right]C_2e^{-\varkappa i\tau}+C_3\tau+C', \\ q &= \frac{3}{2}lC_2e^{-\varkappa i\tau} - \left[\varkappa^2+2(1+m)\varkappa+\frac{3}{2}l\right]C_1e^{+\varkappa i\tau}-C_3\tau+C'', \end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

где

$$\varkappa = \sqrt{1+2m-\frac{1}{2}m^2}, \tag{6.39'}$$

а C_1, C_2, C_3, C', C'' — произвольные постоянные, связанные соотношением

$$C'+C'' = \frac{4}{3}\,\frac{m+1}{l}\,iC_3. \tag{6.39''}$$

Выражая эти постоянные через начальные значения (6.35′), мы представим их в виде линейных комбинаций величин p_0, q_0, p'_0, q'_0, причем C_1, C_2 и C_3 выразятся только через три следующие постоянные:

$$p_0+q_0,\ \ p'_0,\ \ q'_0, \tag{6.40}$$

относительно которых они будут независимыми линейными формами.

Подразумевая теперь под

$$C_1,\ C_2,\ C_3\quad\text{и}\quad C=C'-C'' \tag{6.40'}$$

определяемые таким путем линейные формы величин

$$p_0+q_0,\ p'_0,\ q'_0\quad\text{и}\quad p_0-q_0,$$

мы введем эти формы в качестве произвольных постоянных и в общее решение точных уравнений (6.35), которое представится, таким образом, рядами, расположенными по целым положительным степеням величин

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C\ \text{и}\ \lambda. \tag{6.40''}$$

Мы получим при этом для p и q выражения, которые будут отличаться от только что рассмотренных лишь членами выше первого порядка относительно величин (6.40) и членами, зависящими от λ.

Вследствие этого составляя уравнения (6.38) и выписывая в них только члены, не зависящие от λ и притом линейные относительно величин (6.40), мы получим

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{2}\,l(\rho-1)C_1-\left[\varkappa^2+2(1+m)\varkappa+\frac{3}{2}\,l\right]\left(\frac{1}{\rho}-1\right)C_2+ \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +2\pi C_3+\ \ldots\ =0, \\ F_2 &= \frac{3}{2}\,l(\rho-1)C_1+ \\ &\quad+\left[\varkappa^2+2(1+m)\varkappa+\frac{3}{2}\,l\right]\left(\frac{1}{\rho}-1\right)C_2+\ \ldots\ =0, \\ F_3 &= \left[\varkappa^2+2(1+m)\varkappa+\frac{3}{2}\,l\right](\rho-1)C_1+ \\ &\qquad\qquad\qquad +\frac{3}{2}\,l\left(\frac{1}{\rho}-1\right)C_2+\ \ldots\ =0, \end{aligned}\right\} \quad (6.41)$$

где $\rho=e^{2\varkappa\pi i}$.

Вычисляя функциональный определитель левых частей этих уравнений и полагая затем все величины (6.40″) равными нулю, мы найдем

$$D=\left[\frac{D(F_1,\ F_2,\ F_3)}{D(C_1,\ C_2,\ C_3)}\right]_0=-16\pi(1+m)\varkappa[\varkappa+2(1+m)]^2\sin^2\pi\varkappa, \quad (6.41')$$

и если этот определитель не есть нуль, что мы и будем предполагать*), то по теореме о существовании неявных функций уравнения (6.41) будут разрешимы относительно C_1, C_2, C_3. При условии, что эти последние величины уничтожаются при $C=\lambda=0$, уравнения (6.41) дадут для них вполне определенные выражения в виде рядов, расположенных по степеням C, λ, абсолютно сходящихся пока модули C и λ достаточно малы.

Так как в получаемых таким образом выражениях C_1, C_2 и C_3 постоянная C будет входить только в члены выше первого порядка относительно C и λ, то выражения эти позволят определить величины (6.40) в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням величин p_0-q_0 и λ.

Таким образом, начальные значения p_0, q_0, p_0', q_0', а следовательно, и самые функции p, q, p', q', соответствующие искомому периодическому решению, представятся рядами, расположенными по целым положительным степеням величин p_0-q_0 и λ, и будут содержать, следовательно, одну произвольную постоянную p_0-q_0.

Мы будем далее рассматривать это периодическое решение в предположении

$$p_0=q_0, \quad (6.42)$$

равносильном допущению, что при $\tau=0$ имеем $y=0$.

*) А. М. Ляпунов замечает, что определитель (6.41′) заведомо не равен нулю для случая теории движения Луны. Но этот определитель может быть отличен от нуля и в других случаях.

Так как τ уже содержит произвольную постоянную t_0, то допущение (6.42) не внесет никакого существенного ограничения нашей задачи и послужит только к определению того, что мы уславливаемся понимать под t_0.

Из сказанного ясно, что t_0 есть тот момент времени, в который точка «нулевой массы» находится на прямой M_0M_1, проходящей через обе конечные массы.

3. Установив существование периодического решения уравнений (6.35), переходим к фактическому нахождению этого решения в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням параметра λ, коэффициенты которых были бы все периодическими функциями τ с общим периодом, равным 2π.

Итак, положим

$$p = \sum_{j=1}^{\infty} p_j\lambda^j, \quad q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j\lambda^j, \tag{6.43}$$

где p_j, q_j — не зависящие от λ периодические функции τ, которые, согласно условию (6.42), будем определять в предположении, что

$$p_j(0) = q_j(0) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{6.43$'$}$$

Для того чтобы получить уравнения, которым должны удовлетворять неопределенные коэффициенты p_j, q_j, мы должны подставить ряды (6.43) вместо p и q в уравнения (6.35) и затем приравнять в левых и правых частях получившихся равенств коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ. Для этого нужно прежде всего подставить (6.43) в разложения функций R_p, R_q и результаты подстановки расположить по степеням параметра λ, что дает разложения вида

$$R_p = \sum_{j=2}^{\infty} P_j\lambda^j, \quad R_q = \sum_{j=2}^{\infty} Q_j\lambda^j, \tag{6.44}$$

в которых величины P_j и Q_j зависят, очевидно, только от тех $p_{j'}$, $q_{j'}$, для которых $j' < j$.

Для получения нужных уравнений можно поступить и иначе и вывести эти уравнения другим способом, не требующим подстановок рядов в ряды, что всегда приводит к громоздким выкладкам. В самом деле, так как ряды (6.43) тождественны рядам Тэйлора, то мы должны иметь

$$p_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d^jp}{d\lambda^j}\right)_{\lambda=0}, \quad q_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d^jq}{d\lambda^j}\right)_{\lambda=0}. \tag{6.45}$$

Поэтому нужные уравнения мы получим, дифференцируя уравнения (6.35) последовательно по параметру λ и полагая после каждого такого дифференцирования $\lambda = 0$.

Так или иначе, мы получим в результате следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2p_1}{d\tau^2}+2(1+m)i\frac{dp_1}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p_1+q_1)&=-\frac{3}{2}e^{-2i\tau},\\ \frac{d^2q_1}{d\tau^2}-2(1+m)i\frac{dq_1}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p_1+q_1)&=-\frac{3}{2}e^{+2i\tau}\end{aligned}\right\}\qquad(6.46)$$

и для $j>1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2p_j}{d\tau^2}+2(1+m)i\frac{dp_j}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p_j+q_j)&=\frac{3}{2}q_{j-1}e^{-2i\tau}+lP_j,\\ \frac{d^2q_j}{d\tau^2}-2(1+m)i\frac{dq_j}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p_j+q_j)&=\frac{3}{2}p_{j-1}e^{+2i\tau}+lQ_j.\end{aligned}\right\}\qquad(6.46')$$

Из системы (6.46) мы определим p_1 и q_1, а затем из (6.46′) последовательно найдем p_2, q_2, p_3, q_3 и т. д.

Покажем теперь, что при условии периодичности и при условии (6.43′) функции p_j и q_j, удовлетворяющие вышенаписанным уравнениям, определятся вполне и, как нетрудно убедиться, будут вида

$$\left.\begin{aligned} p_j&=\sum_{s=0}^{s=j}a_{j,\,j-2s}e^{2(j-2s)i\tau},\\ q_j&=\sum_{s=0}^{s=j}a_{j,\,j-2s}e^{-2(j-2s)i\tau},\end{aligned}\right\}\qquad(6.47)$$

где $a_{j,\sigma}$ — некоторые постоянные.

Действительно, составляя характеристическое уравнение системы (6.46), мы немедленно убедимся, что $\pm 2i$ не являются его корнями. Поэтому неоднородная система (6.46) обязательно имеет решение, в котором p_1 и q_1 суть линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций $e^{+2i\tau}$ и $e^{-2i\tau}$. Требуя, чтобы для этого решения, очевидно периодического, выполнялось условие $p_1(0)=q_1(0)$, мы найдем, что его можно представить в виде

$$p_1=a_{1,1}e^{2i\tau}+a_{1,-1}e^{-2i\tau},\quad q_1=a_{1,1}e^{-2i\tau}+a_{1,-1}e^{2i\tau},\qquad(6.47')$$

где

$$a_{1,1}=-\frac{9}{16}\,\frac{2+4m+3m^2}{6-4m+m^2},\quad a_{1,-1}=\frac{3}{16}\,\frac{38+28m+9m^2}{6-4m+m^2}.\qquad(6.47'')$$

Очевидно, что решение (6.47′) имеет вид (6.47), а поэтому выражения (6.47) справедливы для $j=1$.

Предположим, что формулы (6.47) справедливы для всех $j<r$, и докажем, что тогда они будут также справедливы и для $j=r$.

Напишем уравнения (6.46′) для $j=r$. Так как P_r и Q_r зависят только от тех p_j, q_j, для которых $j<r$, то правые части

уравнений (6.46′) (для $j=r$) будут представлять собой многочлены степени r относительно величин $e^{\pm 2i\tau}$ той же структуры, что и p_j, q_j. Следовательно, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}q_{r-1}e^{-2i\tau}+lP_r &= \sum_{s=0}^{r} A_{r,\,r-2s}e^{+2(r-2s)i\tau},\\ \frac{3}{2}p_{r-1}e^{+2i\tau}+lQ_r &= \sum_{s=0}^{r} A_{r,\,r-2s}e^{-2(r-2s)i\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{6.48}$$

где $A_{r,\,r-2s}$ суть постоянные, известным образом зависящие от постоянных $a_{j,\,\sigma}$, соответствующих $j<r$.

Эти постоянные $A_{r,r-2s}$ являются, как нетрудно проверить, многочленами с положительными коэффициентами относительно постоянных $a_{j,\,\sigma}$, для которых $j<r$.

Таким образом, если все p_j, q_j, для которых $j<r$, представляются формулами (6.47), то уравнения (6.46′) для $j=r$ примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2p_r}{d\tau^2}+2(1+m)i\frac{dp_r}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p_r+q_r) &= \sum_{s=0}^{r} A_{r,\,r-2s}e^{2(r-2s)i\tau},\\ \frac{d^2q_r}{d\tau^2}-2(1+m)i\frac{dq_r}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p_r+q_r) &= \sum_{s=0}^{r} A_{r,\,r-2s}e^{-2(r-2s)i\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{6.48′}$$

Так как определяющее уравнение линейной системы, соответствующей (6.48′), то же самое, что и для системы (6.46), и не имеет корней вида $\pm 2ki$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ *), то система (6.48′) обязательно имеет решение, в котором p_r и q_r — линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций $e^{\pm 2ki\tau}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$.

Требуя, чтобы для этого решения (очевидно, периодического) выполнялось условие $p_r(0)=q_r(0)$, мы получим для p_r и q_r выражения вида (6.47), причем коэффициенты $a_{r,\,\sigma}$ определятся

*) В сущности, заключение, что характеристическое уравнение линейной системы, соответствующей (6.48′), не имеет корней вида $\pm 2ki$, где k — целое число, является только предположением, или ограничением, накладываемым на параметр m. Действительно, корни упомянутого характеристического уравнения определятся формулой

$$\varkappa=\pm\sqrt{-\frac{3}{2}l\pm\sqrt{\frac{9}{4}l^2-4(1+m)^2}}$$

и при некоторых m могут быть вида $\pm 2ki$.

уравнениями вида

$$\left.\begin{gathered}\left[4\sigma^2+4(1+m)\sigma+\frac{3}{2}l\right]a_{r,\sigma}+\frac{3}{2}la_{r,-\sigma}=-A_{r,\sigma}\\ (\sigma=-r,\ -r+2,\ \ldots,\ r-2,\ r),\end{gathered}\right\}\tag{6.49}$$

из которых найдем

$$a_{r,\sigma}=\frac{\frac{3}{2}lA_{r,-\sigma}-\left[4\sigma^2-4(1+m)\sigma+\frac{3}{2}l\right]A_{r,\sigma}}{2\sigma^2\left[2(4\sigma^2-1)-4m+m^2\right]},\tag{6.49'}$$

если σ не нуль, и

$$a_{r,0}=-\frac{1}{3l}A_{r,0}\tag{6.49''}$$

для четного r.

Таким образом, зная, что p_1 и q_1 определяются выражениями вида (6.47), мы можем быть уверены, что того же вида выражения получатся и для всех остальных p_j и q_j. При этом, зная $a_{1,1}$ и $a_{1,-1}$, мы можем вычислять все остальные коэффициенты по формулам (6.49′) и (6.49″), которые дают все $a_{r,\sigma}$, соответствующие какому-либо r, когда известны все $a_{j,s}$, для которых $j<r$.

Таким образом, убеждаемся, что искомые функции представятся рядами

$$\left.\begin{aligned}p&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{j}a_{j,\,j-2s}\lambda^j e^{2(j-2s)i\tau},\\ q&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{j}a_{j,\,j-2s}\lambda^j e^{-2(j-2s)i\tau},\end{aligned}\right\}\tag{6.50}$$

периодическими относительно τ с периодом 2π и выполняющими условие (6.42).

Возвращаясь теперь от переменных p и q к переменным u и v, а затем к переменным x и y, мы найдем также периодические ряды, расположенные по степеням параметра λ, удовлетворяющие уравнениям (6.26′), а полагая, наконец, $\lambda=m^2$, получим нужное нам решение уравнений Хилла (6.26).

Все эти ряды будут сходящимися, если сходятся ряды (6.50), а поэтому главной нашей задачей будет теперь доказательство сходимости этих последних рядов.

§ 3. Доказательство сходимости рядов Ляпунова

1. Доказательство сходимости рядов (6.50), представляющих периодическое решение системы (6.35), А. М. Ляпунов проводит при помощи построения ряда, который является усиливающим (мажорантой) для обоих рядов (6.50), которые можно рассматривать как расположенные по степеням λ и $e^{2i\tau}$.

Рассмотрим сначала некоторые вспомогательные предложения, которые будут использованы далее при построении усиливающего ряда. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие неравенству $ac - b^2 > 0$, а $M > 0$ и не превосходит меньшего корня уравнения*

$$\frac{x^2}{a} - 2\frac{x}{b} + \frac{1}{c} = 0, \tag{6.51}$$

то нижней границей модуля функции

$$f(x) = a - 2bx + cx^2 \tag{6.51'}$$

при величинах x, для которых $|x| \leqslant M$, будет

$$f(M) = a - 2bM + cM^2.$$

Представим комплексное число x в виде

$$x = \rho e^{i\varphi},$$

где $\rho = |x|$ — его модуль, а φ — аргумент.

Тогда мы имеем

$$f(x) = a - 2b\rho e^{i\varphi} + c\rho^2 e^{2i\varphi}, \quad f(\bar{x}) = a - 2b\rho e^{-i\varphi} + c\rho^2 e^{-2i\varphi}$$

($\bar{x}$ обозначает, как обычно, число, сопряженное с x).

Далее находим

$$|f(x)|^2 = f(x)\cdot\overline{f(x)} = f(x)f(\bar{x}) =$$
$$= a^2 + 4b^2\rho^2 + c^2\rho^4 - 4b\rho(a + c\rho^2)\cos\varphi + 2ac\rho^2\cos 2\varphi$$

и

$$[f(\rho)]^2 = a^2 + 4b^2\rho^2 + c^2\rho^4 - 4b\rho(a + c\rho^2) + 2ac\rho^2,$$

откуда

$$|f(x)|^2 - [f(\rho)]^2 = 4b\rho(a + c\rho^2)(1 - \cos\varphi) - 2ac\rho^2(1 - \cos 2\varphi) =$$
$$= 8b\rho(a + c\rho^2)\sin^2\frac{\varphi}{2} - 4ac\rho^2\sin^2\varphi =$$
$$= 8abc\rho\left\{\frac{\rho^2}{a} + \frac{1}{c} - 2\frac{\rho}{b}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right\}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Но по условию $\rho \leqslant M$ и, следовательно, не превосходит меньшего (положительного) корня уравнения (6.51), т. е.

$$\frac{\rho^2}{a} + \frac{1}{c} - 2\frac{\rho}{b} \geqslant 0.$$

Поэтому из предыдущего неравенства выводим

$$|f(x)|^2 - [f(\rho)]^2 \geqslant 8abc\rho\left(2\frac{\rho}{b} - 2\frac{\rho}{b}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2} =$$
$$= 16ac\rho^2\sin^4\frac{\varphi}{2} \geqslant 0$$

и, стало быть,

$$|f(x)| \geqslant |f(\rho)| = f(\rho),$$

так как (в силу неравенства $ac - b^2 > 0$) при всяком ρ будем иметь $f(\rho) > 0$.

Далее имеем

$$f(\rho) - f(M) = 2(b - cM)(M - \rho) + c(M - \rho)^2.$$

Так как по условию M не превосходит меньшего корня уравнения (6.51), то

$$M \leqslant \frac{a}{b} - \frac{1}{bc}\sqrt{ac(ac - b^2)} < \frac{a}{b} - \frac{1}{bc}\sqrt{(ac - b^2)(ac - b^2)} = \frac{b}{c},$$

откуда $b - cM > 0$, и мы находим

$$f(\rho) - f(M) \geqslant 0,$$

что и доказывает лемму Ляпунова.

Применим эту лемму к выражению, стоящему в квадратных скобках знаменателя формулы (6.49′), т. е. к функции от параметра m:

$$f(m) = 2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2.$$

Тогда уравнение (6.51) напишется в виде

$$\frac{m^2}{2(4\sigma^2 - 1)} - 2\frac{m}{2} + 1 = 0$$

и меньший его корень определится, как легко видеть, формулой

$$m_1 = \frac{2\sqrt{4\sigma^2 - 1}}{\sqrt{4\sigma^2 - 1} + \sqrt{4\sigma^2 - 3}}. \tag{6.52}$$

Поэтому при $|m| \leqslant M \leqslant m_1$ будем иметь неравенство

$$|2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2| \geqslant 2(4\sigma^2 - 1) - 4M + M^2.$$

Правую часть этого неравенства можно сделать не зависящей от σ. Действительно, для любого σ мы имеем $m_1 > 1$, но притом $\lim\limits_{\sigma \to \infty} m_1 = 1$.

Поэтому мы должны предположить $M \leqslant 1$. Тогда можно написать, что

$$|2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2| \geqslant 6 - 4M + M^2 \tag{6.53}$$

при условии, что

$$|m| \leqslant M \leqslant 1.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(m) = 1 - 2m + \frac{3}{2}m^2,$$

которая, очевидно, удовлетворяет условиям леммы Ляпунова.

Для этой функции уравнение (6.51) напишется в виде

$$m^2 - 2m + \frac{2}{3} = 0.$$

Обозначая через m_1' меньший корень этого уравнения, имеем

$$m_1' = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}4226497.$$

Поэтому, применяя лемму Ляпунова, будем иметь

$$\left| 1 - 2m + \frac{3}{2} m^2 \right| \geqslant 1 - 2M + \frac{3}{2} M^2$$

для всякого m, удовлетворяющего условию

$$|m| \leqslant M \leqslant m_1'.$$

Но в левой части неравенства можно, очевидно, заменить m на $-m$, что дает следующее неравенство:

$$\left| 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 \right| = |l| \geqslant 1 - 2M + \frac{3}{2} M^2, \tag{6.53'}$$

также справедливое при $|m| \leqslant M \leqslant m_1'$.

Объединяя полученные результаты, мы убеждаемся, что оба неравенства (6.53) и (6.53′) заведомо будут выполняться для всякого значения m, удовлетворяющего условию

$$|m| \leqslant M < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{6.54}$$

2. Переходим теперь к построению усиливающего ряда для рядов (6.50), коэффициенты которых определяются формулами (6.49′) и (6.49″).

Считая, что $M < m_1'$, положим

$$L = 1 + 2M + \frac{3}{2} M^2. \tag{6.55}$$

Тогда $|l| < L$ и при $|\sigma| \geqslant 1$

$$\left| \frac{4\sigma^2 - 4(1+m)\sigma + \frac{3}{2} l}{\sigma^2} \right| \leqslant 4 + 4(1+m)\frac{1}{|\sigma|} + \frac{3}{2} L \cdot \frac{1}{\sigma^2} \leqslant$$
$$\leqslant 8 + 4M + \frac{3}{2} L.$$

Теперь из формулы (6.49′) выводим

$$|a_{r,\sigma}| \leqslant \frac{\frac{3}{2} L\,|A_{r,-\sigma}| + \left(8 + 4M + \frac{3}{2} L\right)|A_{r,\sigma}|}{2(6 - 4M + M^2)}. \tag{6.56}$$

Заметим, что хотя формула (6.49′) справедлива только при $|\sigma| \geqslant 1$, но полученное нами неравенство (6.56), дающее оценку коэффициентов $a_{r,\sigma}$, пригодно также и для $\sigma = 0$. Действительно, при $\sigma = 0$ из формулы (6.49″) мы имеем

$$|a_{r,0}| \leqslant \frac{1}{3|l|} |A_{r,0}|. \tag{6.56′}$$

С другой стороны, неравенство (6.56) дает при $\sigma = 0$

$$|a_{r,0}| \leqslant \frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} |A_{r,0}|.$$

Но ввиду (6.55) и учитывая неравенство (6.53′), мы имеем

$$\frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} - \frac{1}{3|l|} \geqslant \frac{22 + 20M + 9M^2}{4(6 - 4M + M^2)} - \frac{2}{3(2 - 4M + 3M^2)} =$$
$$= \frac{84 - 112M + 4M^2 + 72M^3 + 81M^4}{12(6 - 4M + M^2)(2 - 4M + 3M^2)},$$

а эта дробь, очевидно, остается положительной при всех положительных значениях M.

Обозначим теперь через $\alpha_{r,\sigma}$ некоторую верхнюю границу для $|a_{r,\sigma}|$. Так как, как было отмечено выше, величины $A_{r,\pm\sigma}$ суть многочлены относительно величин $a_{j,\tau}$ с положительными коэффициентами, то, заменяя в выражении для $A_{r,\pm\sigma}$ все $a_{j,\tau}$ величинами $\alpha_{j,\tau}$ ($j < r$, $|\tau| \leqslant j$), мы получим также некоторые верхние границы для $|A_{r,\pm\sigma}|$. Обозначим эти верхние границы теми же буквами с тильдой наверху, так что

$$|A_{r,\pm\sigma}| \leqslant \tilde{A}_{r,\pm\sigma}.$$

Тогда, согласно неравенству (6.56), которое справедливо, как показано, для всякого σ, мы можем принять

$$\alpha_{r,\sigma} = \frac{\frac{3}{2} L\tilde{A}_{r,-\sigma} + \left(8 + 4M + \frac{3}{2} L\right)\tilde{A}_{r,\sigma}}{2(6 - 4M + M^2)}. \tag{6.57}$$

Таким образом, принимая

$$\alpha_{1,1} = |a_{1,1}|, \quad \alpha_{1,-1} = |a_{1,-1}| \tag{6.57′}$$

и определяя все остальные $\alpha_{r,\sigma}$ по формуле (6.57), мы получим высшие пределы модулей всех $a_{r,\sigma}$.

Нетрудно притом видеть, что если принять

$$\tilde{A}_{1,-1} = \frac{3}{2}, \quad \tilde{A}_{1,1} = 0, \tag{6.57″}$$

то формула (6.57) при $r = 1$ приводит к равенствам (6.57′) и, следовательно, ею можно будет пользоваться при всех значениях r.

Заметим, что определяемые таким путем величины $\alpha_{r,\sigma}$ все будут возрастающими функциями от M, пока M не превосходит некоторого предела. Так, например, это, очевидно, будет иметь место, пока $M < 2$, так как при этом условии выражение $6 - 4M + M^2$ будет убывающей функцией от M.

Рассмотрим теперь ряд

$$A(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} \alpha_{r,\,r-2s} \lambda^r. \tag{6.58}$$

Так как

$$|a_{r,\,r-2s} e^{2(r-2s)\,i\tau}| \leqslant \alpha_{r,\,r-2s} \quad \text{и} \quad m \leqslant M,$$

то ряд (6.58) является усиливающим для обоих рядов (6.50). Поэтому, если для каких-либо положительных значений M и λ, которые обозначим через $\bar{M}$ и $\bar{\lambda}$, будет показана сходимость ряда (6.58), то этим самым будет доказана, если $\bar{M} < 2$, абсолютная сходимость рядов (6.50) при всяком вещественном τ и при $|\lambda| \leqslant \bar{\lambda}$, для всякого положительного m, не превосходящего $\bar{M}$.

Но условия сходимости ряда (6.58) найти весьма легко, так как этот ряд можно определить некоторым алгебраическим уравнением *).

Действительно, из (6.57) следует

$$\sum_{s=0}^{s=r} \alpha_{r,\,r-2s} = \frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_{r,\,r-2s}, \tag{6.58'}$$

а сумма, находящаяся во второй части равенства, есть результат замены в выражении

$$\frac{3}{2} q_{r-1} + lP_r$$

каждого p_j и каждого q_j выражением

$$\sum_{s=0}^{j} \alpha_{j,\,j-2s},$$

соответствующим тому же j. Поэтому

$$\sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_{r,\,r-2s} = \frac{3}{2} \sum_{s=0}^{r-1} \alpha_{r-1,\,r-1-2s} + LP_r.$$

*) В этом и заключается сущность метода Ляпунова, позволяющего свести доказательство сходимости рядов, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, к рассмотрению сходимости ряда, удовлетворяющего некоторому алгебраическому уравнению.

Умножая обе части равенства (6.58′) на λ^r и суммируя по r от 1 до бесконечности, мы получим, принимая во внимание (6.57″),

$$A(\lambda) \equiv \frac{8+4M+3L}{2(6-4M+M^2)}\left\{\frac{3}{2}[1+A(\lambda)]\cdot\lambda + LR_p\right\}.$$

Но сделанная замена равносильна замене p и q на $A(\lambda)$. Поэтому в силу (6.34) найдем, что имеет место следующее тождество:

$$A(\lambda) \equiv \frac{8+4M+3L}{2(6-4M+M^2)}\left\{\frac{3}{2}[1+A(\lambda)]\lambda + {}\right.$$
$$\left. {}+ L\left[\frac{1}{(1-A(\lambda))^2} - 1 - 2A(\lambda)\right]\right\}. \qquad (6.59)$$

Полагая теперь для краткости

$$\varepsilon = \frac{3(22+20M+9M^2)}{8(6-4M+M^2)}\lambda, \quad h = \frac{22+20M+9M^2}{4(6-4M+M^2)}L, \qquad (6.59')$$

рассмотрим следующее алгебраическое уравнение:

$$z = \varepsilon(1+z) + h\frac{(3-2z)z^2}{(1-z)^2}, \qquad (6.60)$$

которому в силу тождества (6.59) удовлетворяет ряд (6.58).

Таким образом, $A(\lambda)$ представляет действительно разложение корня этого уравнения, обращающегося в нуль при $\lambda = 0$.

Чтобы еще более упростить задачу, рассмотрим, следуя Ляпунову, вместо кубичного уравнения (6.60) следующее квадратное:

$$z = \varepsilon(1+z) + \frac{9hz^2}{3-4z}. \qquad (6.61)$$

Разложение решения уравнения (6.61) по степеням параметра ε *) даст нам другую усиливающую функцию, коэффициенты разложения которой превосходят коэффициенты ряда (6.58). Действительно, коэффициенты разложения функции $\frac{9}{3-4z}$ по степеням z больше, как легко проверить, соответствующих коэффициентов разложения функции $\frac{3-2z}{(1-z)^2}$.

Но корень уравнения (6.61), уничтожающийся вместе с ε, определяется формулой

$$z = \frac{3+\varepsilon-\sqrt{9-6(7+18h)\varepsilon+49\varepsilon^2}}{2(4+9h-4\varepsilon)}. \qquad (6.61')$$

---

*) Мы можем, очевидно, вместо параметра λ рассматривать новый параметр ε, связанный с λ первой из формул (6.59′).

Правая часть последнего равенства может быть разложена в ряд по степеням параметра ε, если

$$\varepsilon \leqslant \frac{3}{7+18h+\sqrt{(7+18h)^2-49}}.$$

Поэтому заведомо, если

$$\varepsilon \leqslant \frac{3}{2(7+18h)},$$

а тем более если

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{6(1+2h)}, \tag{6.62}$$

то разложение правой части (6.61′) будет сходящимся.

Следовательно, при том же условии (6.62) будет заведомо сходиться также ряд (6.58), представляющий разложение усиливающей функции $A(\lambda)$.

Условие (6.62) представляет собой неравенство относительно величин M и λ. В силу сделанных оценок и вспомогательных предложений, доказанных в разделе 1, которые справедливы для любых комплексных значений m (если только $|m| \leqslant M$), ряды (6.50) будут сходиться абсолютно и равномерно для всех $|m| \leqslant M$, когда M и L удовлетворяют неравенству (6.62).

Обращаемся теперь к выражениям ε и h, которые даются формулами (6.59′), и полагаем $L = M^2$.

Тогда мы получим ряды, удовлетворяющие уравнениям (6.32) при $\lambda = m^2$, т. е. получим то решение задачи, которое нашел сам Хилл. Однако Хилл не дал доказательства сходимости полученных им рядов.

Полагая $L = M^2$, мы сделаем ε и h функциями одного только M, и возникает вопрос о наибольшем значении M, при котором ряд (6.58) остается сходящимся (будучи, конечно, сходящимся и для всякого меньшего M). Покажем, что $1/7$ еще не достигает этого предела.

Действительно, при $M = \frac{1}{7}$ формулы (6.59′) дают

$$\varepsilon = \frac{1227}{34\,888} = \frac{8589}{244\,216}, \quad h = \frac{52\,761}{34\,888},$$

откуда следует

$$\frac{1}{6(1+2h)} = \frac{8722}{210\,615} > \varepsilon.$$

Таким образом, убеждаемся, что

$$M \leqslant \frac{1}{7}, \tag{6.63}$$

а следовательно, при

$$|m| \leqslant \frac{1}{7} \tag{6.63′}$$

все рассмотренные нами ряды будут сходящимися абсолютно и равномерно.

Для теории движения Луны

$$m = 0{,}08084893\ \ldots,$$

и поэтому условие (6.63′) выполняется. Следовательно, ряды Хилла применимы в лунной теории. Однако, например, для восьмого спутника Юпитера этот параметр равен

$$m = -0{,}1461537\ \ldots,$$

что уже превышает по модулю $^1/_7$, а поэтому возможность применения рядов Хилла в этой задаче пока не выяснена.

3. Перейдем к определению некоторого верхнего предела погрешности, которую мы неизбежно сделаем, отбрасывая в рядах (6.50) все члены, начиная с некоторого определенного номера.

Заменяя ряды (6.50) суммами некоторого конечного числа первых их членов, мы сделаем ошибку, которая не превзойдет, очевидно, по числовой величине суммы соответствующих членов усиливающего ряда, определяемого уравнением (6.60) и, тем более, уравнением (6.61). Но так как оценки, сделанные нами для доказательства сходимости, довольно грубые, то эти две суммы могут сильно отличаться друг от друга.

Поэтому Ляпунов строит еще один усиливающий ряд, который дает возможность получить более точный высший предел погрешности, о которой идет речь.

Для этой цели возьмем опять формулу (6.57), но будем пользоваться ею, только начиная с некоторого $r = N + 1$. Для $r \leqslant N$ положим

$$\alpha_{r,\sigma} = |a_{r,\sigma}| \quad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ |\sigma| \leqslant r). \tag{6.64}$$

Тогда для $r > N$ будет справедлива формула (6.58′). Рассмотрим теперь ряд (6.58) в этом новом предположении и положим во избежание путаницы

$$A^*(\lambda) = \\ = \sum_{r=1}^{N} \left\{ \sum_{s=0}^{r} |a_{r,\,r-2s}| \right\} \lambda^r + \frac{8 + 4M + 3L}{2\,(6 - 4M + M^2)} \sum_{r=N+1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_{r,\,r-2s} \right\} \lambda^r. \tag{6.65}$$

Второе слагаемое в правой части равенства (6.65) представляет, как и раньше, в силу (6.59) разложение функции

$$\frac{8 + 4M + 3L}{2\,(6 - 4M + M^2)} \left\{ \frac{3}{2}(1 + A^*)\,\lambda + L \left[\frac{1}{(1 - A^*)^2} - 1 - 2A^* \right] \right\} = \\ = \varepsilon\,(1 + A^*) + h\,\frac{(3 - 2A^*)\,A^{*2}}{(1 - A^*)^2}$$

по степеням λ, но только ту часть этого разложения, которая начинается с члена, содержащего λ^{N+1}.

Пусть разложение этой функции вообще имеет вид

$$\varepsilon + L_2\lambda^2 + L_3\lambda^3 + \ldots + L_N\lambda^N + \ldots$$

Первые N этого разложения получим, подставляя вместо A^* величину

$$\sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{s=0}^{r}|a_{r,\,r-2s}|\right\}\lambda^r,$$

а поэтому, полагая

$$\varepsilon' = \sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{s=0}^{r}|a_{r,\,r-2s}|\right\}\lambda^r - \sum_{r=2}^{N}L_r\lambda^r, \tag{6.65'}$$

мы найдем, что (6.65) представляет разложение по степеням λ корня уравнения третьей степени

$$z = \varepsilon' + \varepsilon z + h\frac{(3-2z)\,z^2}{(1-z)^2}.$$

Вводя обозначения

$$\delta = \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}, \quad g = \frac{h}{1-\varepsilon}, \tag{6.66}$$

мы напишем окончательно это уравнение в виде

$$z = \delta + g\frac{(3-2z)\,z^2}{(1-z)^2}. \tag{6.67}$$

А. М. Ляпунов использует ряд, определяемый уравнением (6.67) для оценки погрешности в рядах Хилла.

Но этот же ряд можно использовать, как отмечает в цитированной уже работе Г. А. Мерман, для нахождения новой нижней границы для радиуса сходимости рядов (6.50).

Изложим результаты, полученные Г. А. Мерманом. Итак, будем искать точный радиус сходимости ряда $z(\delta)$, расположенного по целым положительным степеням δ и удовлетворяющего уравнению (6.67).

Разложим функцию $\frac{(3-2z)\,z^2}{(1-z)^2}$ в ряд по степеням z, что возможно при условии $|z| < 1$, которое мы и будем предполагать выполненным. Тогда уравнение (6.67) можно переписать в виде

$$\delta = z + \alpha_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \tag{6.67'}$$

где справа стоит ряд, абсолютно сходящийся при $|z| < 1$.

Обращая этот ряд, мы получим следующее разложение:

$$z = \delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + \ldots, \tag{6.68}$$

область сходимости которого мы должны теперь найти.

Разлагая функцию $\delta(z)$ в ряд Тэйлора в окрестности некоторой точки $z = c$, лежащей внутри круга $|z| = 1$, мы имеем

$$\delta = \gamma + \delta'(c)(z - c) + \frac{1}{2}\delta''(c)\cdot(z - c)^2 + \ldots,$$

где $\gamma = \delta(c)$. Обращая этот степенной ряд, имеем

$$z = c + \frac{1}{\delta'(c)}(\delta - \gamma) + \ldots$$

Этот процесс обращения ряда, очевидно, возможен только в том случае, когда $\delta'(c) \neq 0$. Ближайшее к нулю значение c, обращающее в нуль $\delta'(c)$, будет ближайшей к нулю особой точкой (разветвления) обращенного ряда. Поэтому радиус сходимости разложения $\delta(z)$ в окрестности нуля будет равен $|c|$*).

Таким образом, для нахождения c и γ имеем, кроме (6.67), еще уравнение $\delta'(z) = 0$, где $\delta(z)$ есть функция, определяемая уравнением (6.67).

Дифференцируя (6.67) по z и полагая $\delta'(z) = 0$, $z = c$, мы получим

$$1 = \frac{2}{1 - c}\left[3gc + g\,\frac{(3 - 2c)\,c^2}{(1 - c)^2}\right].$$

На основании уравнения (6.67) второй член в квадратных скобках можем заменить на $c - \gamma$. Таким образом, для определения c и γ получим следующие уравнения:

$$c = \frac{1 + 2\gamma}{3(1 + 2g)}, \quad 2gc = \frac{(1 - c)^3}{3 - 3c + c^2}, \tag{6.69}$$

которые дадут особую точку $\delta = \gamma$ ряда (6.68) при условии $|c| < 1$. Решая второе уравнение системы (6.69), найдем

$$c = 1 - \sqrt[3]{\frac{2g}{1 + 2g}}. \tag{6.70}$$

Так как в дальнейшем, согласно предыдущей теории, мы должны положить $\lambda = M^2$ то, согласно (6.59′) и (6.66), ε и h, а следовательно g, суть вещественные и положительные (при $\varepsilon < 1$) числа.

Если под $\sqrt[3]{\dfrac{2g}{1 + 2g}}$ будем понимать лишь вещественное значение радикала, то все три корня уравнения (6.69) даст формула

$$c_k = 1 - \sqrt[3]{\frac{2g}{1 + 2g}}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2),$$

*) Если бы оказалось (как замечает Мерман), что $|c| \geqslant 1$, то это означало бы, что внутри круга $|z| < 1$ функция $\delta'(z)$ не обращается в нуль. Радиус сходимости обращенного ряда был бы равен бесконечности или модулю того значения δ, которое соответствует $z = 1$.

и мы имеем

$$|c_0| = 1 - \sqrt[3]{\frac{2g}{1+2g}},$$

$$|c_1| = |c_2| = \sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{2g}{1+2g}} + \sqrt[3]{\left(\frac{2g}{1+2g}\right)^2}},$$

откуда видно, что два комплексных корня лежат вне круга $|z| = 1$. Единственный вещественный корень (6.70), напротив, лежит внутри этого круга. Мы можем, следовательно, ограничиться разысканием единственного вещественного решения системы (6.69).

Практически нам нужно подобрать такое $M > 0$, чтобы при $\varepsilon < 1$ удовлетворялась система (6.69). Тогда ряды (6.50) будут сходиться абсолютно и равномерно при $|m| \leqslant M$ и при всех вещественных значениях τ.

4. Мерман производит выкладки и вычисления, ограничиваясь случаем $N = 2$, замечая, что при больших значениях N нельзя получить существенное расширение круга сходимости.

Прежде чем вычислить M, указанное в предыдущем разделе, подготовим необходимые формулы для этого случая.

Из формул предыдущего параграфа мы имеем при $m = M$

$$|a_{1,1}| + |a_{1,-1}| = \frac{3}{8}\,\frac{22 + 20M + 9M^2}{6 - 4M + M^2}.$$

Поэтому, согласно (6.59′),

$$\varepsilon = [|a_{1,1}| + |a_{1,-1}|]\,\lambda \qquad (\text{при } m = M).$$

А тогда формула (6.65) дает

$$\varepsilon' = \varepsilon + \ldots,$$

где не выписаны члены, содержащие λ в степенях выше первой. С той же точностью на основании (6.66) и (6.67) получаем

$$\delta = \varepsilon' + \ldots = \varepsilon + \ldots,$$

$$z = \delta + \ldots = \varepsilon + \ldots$$

Кроме того,

$$g = h + \ldots, \quad \frac{3 - 2z}{(1 - z)^2} = 3 + \ldots,$$

где отброшены члены, зависящие от λ.

Если отбросить только члены, начинающиеся с третьих степеней λ, то

$$\varepsilon z + h\frac{(3 - 2z)\,z^2}{(1 - z)^2} = (1 + 3h)\,\varepsilon^2 + \ldots$$

Таким образом,

$$L_2\lambda^2 = (1 + 3h)\,\varepsilon^2.$$

Согласно (6.65′) мы имеем при $N=2$

$$\varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon_1 - L_2\lambda^2 = \varepsilon + \varepsilon_1 - (1+3h)\varepsilon^2,$$

где

$$\varepsilon_1 = [|a_{2,-2}| + |a_{2,0}| + |a_{2,2}|]\lambda^2.$$

Остается выписать выражения для коэффициентов $a_{2,\pm 2}$ и $a_{2,0}$.

По формулам (6.49′) и (6.49″) имеем

$$a_{2,2} = \frac{\frac{3}{2}LA_{2,-2} - \left[16 - 8(1+M) + \frac{3}{2}L\right]A_{2,2}}{8(30-4M+M^2)},$$

$$a_{2,0} = -\frac{1}{3L}A_{2,0},$$

$$a_{2,-2} = \frac{\frac{3}{2}LA_{2,2} - \left[16 + 8(1+M) + \frac{3}{2}L\right]A_{2,-2}}{8(30-4M+M^2)}.$$

Выразим теперь $A_{2,\pm 2}$, $A_{2,0}$ через $a_{1,\pm 1}$.

Прежде всего мы имеем

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}p + \frac{3}{8}p^2 + \ldots,$$

$$(1-q)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}q + \frac{15}{8}q^2 + \ldots,$$

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}} - 1 - \frac{1}{2}p - \frac{3}{2}q =$$

$$= R_p = \frac{3}{8}(p^2 + 2pq + 5q^2) + \ldots$$

Считая $p = p_1\lambda + \ldots$, $q = q_1\lambda + \ldots$, найдем

$$R_p = P_2\lambda^2 + \ldots,\quad P_2 = \frac{3}{8}(p_1^2 + 2p_1q_1 + 5q_1^2).$$

Далее получаем

$$p_1 = a_{1,1}e^{2i\tau} + a_{1,-1}e^{-2i\tau},\quad q_1 = a_{1,1}e^{-2i\tau} + a_{1,-1}e^{2i\tau},$$

$$p_1^2 = a_{1,1}^2e^{4i\tau} + 2a_{1,1}a_{1,-1} + a_{1,-1}^2e^{-4i\tau},$$

$$p_1q_1 = a_{1,1}^2 + a_{1,-1}^2 + a_{1,1}a_{1,-1}[e^{4i\tau} + e^{-4i\tau}],$$

$$q_1^2 = a_{1,1}^2e^{-4i\tau} + 2a_{1,1}a_{1,-1} + a_{1,-1}^2e^{4i\tau},$$

$$a_1e^{-2i\tau} = a_{1,1}e^{-4i\tau} + a_{1,-1}.$$

Составляя теперь выражение $\frac{3}{2} q_1 e^{-2i\tau} + LP_2$, найдем, что оно имеет вид

$$\frac{3}{2} q_1 e^{-2i\tau} + LP_2 = A_{2,2} e^{4i\tau} + A_{2,0} + A_{2,-2} e^{-4i\tau},$$

где

$$A_{2,2} = \frac{3}{8} L \left(a_{1,1}^2 + 2a_{1,1} a_{1,-1} + 5a_{1,-1}^2\right),$$

$$A_{2,0} = \frac{3}{2} a_{1,-1} + \frac{3}{4} L \left(6a_{1,1} a_{1,-1} + a_{1,1}^2 + a_{1,-1}^2\right),$$

$$A_{2,-2} = \frac{3}{2} a_{1,1} + \frac{3}{8} L \left(a_{1,-1}^2 + 2a_{1,1} a_{1,-1} + 5a_{1,1}^2\right).$$

С полученными данными Мерман производит вычисления, имеющие целью обнаружить точное значение для M.

Полагая $M = 0{,}18$, он находит, что c, вычисленное по формуле

$$c = \frac{1 + 2\delta}{3(1 + 2g)},$$

удовлетворяет неравенству

$$2gc < \frac{(1 - c)^3}{3 - 3c + c^2},$$

а при $M = 0{,}181$

$$2gc > \frac{(1 - c)^3}{3 - 3c + c^2}.$$

Отсюда заключаем, что точное значение M, удовлетворяющее уравнениям (6.69), лежит между 0,18 и 0,181.

Поэтому ряды Ляпунова (6.50) заведомо остаются сходящимися абсолютно и равномерно при $|m| \leqslant 0{,}18$, а стало быть, например, они пригодны для построения теории движения восьмого спутника Юпитера.

Примечание 1. Полученный предел значения m, который обеспечивает сходимость рядов Ляпунова, представляющих решение задачи Хилла, не является, разумеется, окончательным, так как его получение основано на применении усиливающих рядов, являющихся все же довольно грубым инструментом для вывода точных оценок.

И действительно, после работы Мермана появились еще две интересные работы, одна из которых принадлежит М. С. Петровской, а другая — Ю. А. Рябову.

В работе М. С. Петровской показано при помощи построения другого усиливающего ряда, что ряды Ляпунова продолжают оставаться сходящимися, пока абсолютное значение m не превышает предела 0,21.

В работе Ю. А. Рябова использован метод, заключающийся в составлении мажорирующих функциональных уравнений и получена оценка $0 < m < 0{,}258$, которая может быть и еще более улучшена. Все три упомянутые в этом параграфе работы (Г. А. Мермана, М. С. Петровской и Ю. А. Рябова) напечатаны в Бюллетене Института теоретической астрономии в 1952, 1959 и 1962 гг. соответственно.

Примечание 2. Все рассмотренные в этой главе результаты, касающиеся доказательства сходимости рядов Ляпунова, относятся к рядам, расположенным по степеням параметра m, коэффициентами которых являются тригонометрические многочлены относительно синусов и косинусов целых кратностей τ.

Если же представлять решение задачи Хилла тригонометрическими рядами типа (6.24), коэффициенты которых являются целыми функциями параметра m, то такие ряды могут оказаться сходящимися (но не абсолютно!) и для больших значений m.

Аналогичное явление известно нам из теории невозмущенного кеплеровского движения, где разложения координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета e сходятся абсолютно лишь при $e < 0{,}6627\ldots$, в то время как ряды Фурье, представляющие те же координаты, сходятся (но не абсолютно!) для всех значений e в промежутке $0 \leqslant e < 1$.

Глава VII

ЗАДАЧА ФАТУ

Мы закончим рассмотрение ограниченных задач небесной механики изложением некоторых результатов, относящихся к так называемой задаче Фату.

Эта задача представляет собой частный случай общей задачи двух тел конечных размеров, когда одно из этих двух тел есть шар, обладающий сферическим распределением плотностей. Тогда, как известно, такой шар притягивается и притягивает как материальная точка. Если притом масса шара ничтожно мала по сравнению с массой другого тела, то можно считать, что материальная точка не влияет на движение тела. Следовательно, задача приводится к изучению движения материальной точки, притягиваемой каким-либо материальным телом. Рассматривая только относительное движение точки, мы можем считать материальное тело неподвижным.

Разумеется, эта задача хорошо известна со времен Ньютона как задача теоретической механики, но Фату провел систематическое изучение движения точки в этой задаче и выявил некоторые важные особенности этого движения, вследствие чего задача и получила имя этого ученого.

Здесь предполагается, что сила притяжения определяется законом Ньютона. Если частицы двух однородных шаров взаимодействуют по какому-либо другому степенно́му закону, то закон взаимодействия между двумя такими шарами уже не будет ньютоновским, а есть некоторая довольно сложная функция расстояния между их центрами.

§ 1. Постановка задачи. Общие свойства движения

1. Рассмотрим гравитационное поле, вызываемое наличием некоторой неподвижной притягивающей массы, которую будем именовать для сокращения речи телом M.

Выберем каким-либо образом систему декартовых координат $(Oxyz)$, неизменно связанную с телом M, и пусть $U(x, y, z)$ есть силовая функция притяжения этого тела.

Тогда дифференциальные уравнения движения материальной точки $P(x, y, z)$, находящейся под действием притяжения тела M, имеют следующий вид:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{7.1}$$

и задача Фату приводится к интегрированию, или исследованию, этой системы дифференциальных уравнений.

Известно, что система (7.1) может быть проинтегрирована только в некоторых простейших частных случаях. Таков, например, случай центрального гравитационного поля, когда функция сил U зависит только от расстояния r точки P до начала координат (центр силового поля) и когда уравнения движения интегрируются в квадратурах.

Другой интегрируемый случай представляет классическая задача двух неподвижных центров, а также обобщенная задача двух неподвижных центров. Можно было бы отметить еще некоторые простые случаи интегрируемости, представляющие собой комбинации двух отмеченных.

Отметим, что тело M, вызывающее гравитационное поле в рассматриваемой задаче, может иметь весьма различный вид. Это может быть одно тело в собственном смысле этого слова, например, какая-либо планета Солнечной системы, и тогда задача Фату представляет собой задачу о движении малого спутника в поле притяжения планеты. Сюда же относится, разумеется, и задача о движении искусственного спутника в гравитационном поле Земли (или Луны).

Тело M может быть также «составным», образуемым, например, двумя неподвижными притягивающими центрами или даже многими неподвижными центрами, расположенными симметрично относительно оси Oz и плоскости (xOy), и действующими на пассивную точку с силами, зависящими только от расстояний этой точки до неподвижных центров.

Составным телом является также система, образуемая Сатурном и его кольцом, так что в этом случае задачей Фату является задача о движении близкого спутника Сатурна.

Тело M может также состоять из неподвижного точечного центра, окруженного системой гауссовых колец, что приводит нас к задаче об определении вековых возмущений в движении астероида по методу Гаусса.

Наконец, тело M может представлять собой пылевую или газовую туманность с центральным ядром (или без центрального ядра).

Во всяком случае, силовая функция притяжения тела есть или силовая функция притяжения материального тела на внешнюю точку, или силовая функция притяжения массы на точку, являющуюся частью этой массы, или представляет собой комбинацию и того и другого.

Поэтому функция $U(x, y, z)$, входящая в уравнения движения (7.1), удовлетворяет либо уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{7.2}$$

либо уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi f\delta(x, y, z), \tag{7.2$'$}$$

где $\delta(x, y, z)$ — заданная функция координат, или U есть сумма двух слагаемых, одно из которых удовлетворяет уравнению Лапласа, а другое — уравнению Пуассона.

Аналитическое выражение для функции U, вообще говоря, может быть получено только в виде бесконечного ряда того или иного вида, так как представление этой функции в конечном виде (а особенно в элементарных функциях) почти всегда невозможно.

В теории притяжения указываются разложения силовой функции неподвижной массы (имеющей три, два или одно измерение) в ряды функций Лапласа или гармонических многочленов. Такие разложения имеют различную форму в зависимости от того, больше или меньше радиус-вектор r точки P наибольшего из расстояний точек тела M до начала координат.

В первом случае мы имеем разложение вида

$$U(x, y, z)=f\sum_{k=0}^{\infty}\frac{U_k(x, y, z)}{r^{2k+1}}, \tag{7.3}$$

а во втором случае

$$U(x, y, z)=f\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{U}_k(x, y, z) \tag{7.3$'$}$$

где U_k и $\tilde{U}_k$ — некоторые однородные многочлены степени k, зависящие от формы и структуры притягивающего тела M.

Какова бы ни была силовая функция U, уравнения (7.1) всегда имеют один первый интеграл, являющийся интегралом энергии (или живой силы).

Этот интеграл, легко выводящийся из уравнений (7.1), имеет вид

$$V^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2(U+h), \tag{7.4}$$

где h — обычная постоянная энергии.

Из рассмотрения интеграла (7.4) можно вывести некоторые простые заключения об областях возможности или невозможности движения.

В самом деле, какова бы ни была рассматриваемая задача (т. е. каково бы ни было гравитационное поле), во всяком действительном движении мы должны иметь $V^2 \geqslant 0$, вследствие чего координаты точки P во всякий момент времени должны удовлетворять неравенству

$$U(x,\ y,\ z)+h \geqslant 0. \tag{7.4$'$}$$

Допустим, что начальное положение точки P находится в той области внешнего относительно тела M пространства, которая содержит в себе бесконечно удаленные точки. Тогда силовая функция U обращается в нуль в бесконечности и может быть представлена разложением (7.3)*).

Если теперь начальная скорость точки P такова, что постоянная живой силы оказывается неотрицательной, то условие (7.4′) будет выполнено при любом положении точки P в указанной области пространства. Эта часть пространства и будет областью возможности движения.

Если же начальные условия таковы, что $h < 0$, то точка P заведомо не может удалиться в бесконечность и областью возможности движения будет та часть внешнего (по отношению к телу M) пространства, которая ограничена поверхностью

$$U(x,\ y,\ z)+h=0, \tag{7.4$''$}$$

являющейся поверхностью нулевой скорости.

Если начальное положение точки P находится в части пространства, не содержащей бесконечно удаленных точек (например, внутри тела или в его внутренней пустой полости), то результаты получатся другими.

Легко сообразить, что при $h \geqslant 0$ точка P может двигаться всюду в той области, в которой она находилась в начальный момент, и может, следовательно, достигать границы этой области. Если же $h < 0$, то результат будет зависеть от вида (и размеров) поверхности нулевой скорости (7.4″), так что область возможности движения будет в этом случае представлять общую часть области, в которой в начальный момент находится точка P, и области, ограниченной поверхностью (7.4″).

2. Рассмотрим теперь более частный, но более важный для приложений случай, когда гравитационное поле обладает симметрией относительно некоторой оси, которую всегда можно отождествить с осью Oz.

В этом случае силовая функция U будет зависеть только от двух переменных — радиуса-вектора r и аппликаты z или, если угодно, от расстояния ρ точки P до оси Oz (оси симметрии

*) Таков, например, случай, когда тело M есть сплошное материальное тело и точка P находится во внешнем относительно этого тела пространстве.

поля) и от аппликаты z. Поэтому мы можем положить

$$U(x, y, z) = F(r, z) = \Phi(\rho, z), \tag{7.5}$$

а разложения (7.3) и (7.3′) напишутся соответственно следующим образом:

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{r^{k+1}} P_k\left(\frac{z}{r}\right) \tag{7.6}$$

и

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k r^k P_k\left(\frac{z}{r}\right), \tag{7.6′}$$

где P_k — многочлен Лежандра k-го порядка, а A_k и $\tilde{A}_k$ — характерные для тела M постоянные, зависящие от формы и структуры этого тела.

Заменяя многочлены Лежандра их выражениями, мы напишем еще формулы (7.6) и (7.6′) в следующем виде:

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(r, z)}{r^{2k+1}} \tag{7.7}$$

и

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{F}_k(r, z), \tag{7.7′}$$

где F_k и $\tilde{F}_k$ — однородные многочлены k-й степени.

Полезно еще заметить, что если гравитационное поле обладает вдобавок симметрией относительно плоскости $z = 0$, то функции $F(r, z)$ и $\Phi(\rho, z)$ будут четными функциями от координаты z, т. е.

$$F(r, -z) = F(r, z), \quad \Phi(\rho, -z) = \Phi(\rho, z).$$

В этом случае разложения (7.6) и (7.6′) будут содержать многочлены Лежандра только четного порядка, или, иными словами, все постоянные A_k и $\tilde{A}_k$ с нечетными значками будут равны нулю.

Так как $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то в случае силового поля (7.5) уравнения движения точки примут вид

$$\ddot{x} = \frac{x}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \ddot{y} = \frac{y}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{z}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \tag{7.8}$$

откуда найдем сейчас же еще один интеграл

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c, \tag{7.9}$$

который есть не что иное, как интеграл площадей в плоскости (xOy).

Такого рода случаи уже отмечались в главе IV, когда, например, все неподвижные центры лежат на оси (Oz) и действуют на пассивную точку с силами, являющимися любыми функциями от расстояний.

Таким образом, в случае осесимметричного поля уравнения движения имеют два интеграла: интеграл энергии (7.4) и интеграл площадей (7.9).

Если вместо прямоугольных координат воспользоваться цилиндрическими, полагая

$$x = \rho\cos v, \quad y = \rho\sin v, \tag{7.10}$$

то уравнения движения в задаче Фату можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 &= \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v}) &= \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Эти уравнения имеют два очевидных интеграла — живой силы и площадей

$$\left.\begin{aligned} V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{v}^2 + \dot{z}^2 &= 2(\Phi + h), \\ \rho^2\dot{v} &= c, \end{aligned}\right\} \tag{7.11$'$}$$

с помощью которых порядок системы (7.11) можно понизить на две единицы. Однако мы воспользуемся для этой цели только интегралом площадей, который позволяет исключить из уравнений движения угловую переменную v. Производя исключение и полагая для краткости

$$W(\rho, z) = \Phi(\rho, z) - \frac{c^2}{2\rho^2}, \tag{7.12}$$

мы получим систему с двумя неизвестными ρ и z:

$$\ddot{\rho} = \frac{\partial W}{\partial\rho}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{7.13}$$

с интегралом

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = 2(W + h), \tag{7.13$'$}$$

после интегрирования которой найден угол v простой квадратурой

$$v = v_0 + c\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\rho^2}, \tag{7.13$''$}$$

где v_0 — произвольная постоянная, равная начальному значению полярного угла.

Движение точки P в заданном силовом поле определяется начальными условиями

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0 \tag{7.14}$$

или

$$\rho_0,\ v_0,\ z_0,\ \dot{\rho}_0,\ \dot{v}_0,\ \dot{z}_0, \tag{7.14'}$$

которые могут быть заданы произвольно.

Если, в частности, вектор начальной скорости лежит в плоскости (xOy), т. е. если $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, то ввиду симметрии поля относительно плоскости (xOy) точка P всегда останется в этой плоскости и ее орбита есть плоская кривая. Действительно, так как функция W есть четная функция от z, то мы имеем

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 2z\,\frac{\partial W}{\partial (z^2)}, \tag{7.15}$$

а поэтому уравнения (7.13) удовлетворяются при $z = 0$ и задача приводится к интегрированию единственного уравнения второго порядка.

Пусть теперь начальные условия таковы, что мы имеем

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{\dot{y}_0}{y_0}. \tag{7.16}$$

Тогда $c = 0$ и, следовательно, $v = v_0 = \text{const}$. Поэтому в этом случае движение точки происходит в плоскости, проходящей через ось Oz, т. е. через ось симметрии силового поля. Орбита точки P также есть плоская кривая, но ее нахождение требует интегрирования системы четвертого порядка (7.13).

Эти уравнения ничем не отличаются от уравнений движения при $c \neq 0$, но в последнем случае кривая, определяемая уравнениями (7.13), представляет собой проекцию пространственной траектории точки P на какую-либо меридиональную плоскость, т. е. на плоскость, проходящую через ось симметрии гравитационного поля.

Если, наконец, одновременно выполняются условия

$$z_0 = \dot{z}_0 = 0, \quad \frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{\dot{y}_0}{y_0},$$

то движение происходит одновременно и в плоскости (xOy) (плоскость экватора), и в плоскости, проходящей через ось Oz, а стало быть, траектория движения есть прямая, проходящая через начало координат и лежащая в плоскости (xOy).

3. Рассмотрим теперь общий случай, когда орбита точки P есть пространственная кривая, и отметим один замечательный результат, касающийся движения линии узлов плоскости мгновенной орбиты.

В самом деле, рассмотрим плоскость, проходящую через начало координат, точку $P(x, y, z)$ и прямую с угловыми коэффициентами $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Уравнение этой плоскости (плоскости мгновенной орбиты) напишется в виде

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Линия пересечения этой плоскости с плоскостью (xOy), или *линия узлов* мгновенной орбиты, определится уравнением

$$(y\dot{z} - z\dot{y}) X - (x\dot{z} - z\dot{x}) Y = 0.$$

Обозначая через Ω угол, образуемый этой прямой с положительным направлением оси Ox, мы имеем

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{x\dot{z} - z\dot{x}},$$

откуда находим

$$\dot{\Omega} = \frac{(y\ddot{z} - z\ddot{y})(x\dot{z} - z\dot{x}) - (x\ddot{z} - z\ddot{x})(y\dot{z} - z\dot{y})}{(x\dot{z} - z\dot{x})^2 + (y\dot{z} - z\dot{y})^2}. \tag{7.17}$$

Подставляя сюда выражения для вторых производных из уравнений (7.8), используя интеграл площадей (7.9) и имея в виду, что F — четная функция z, мы получим

$$\dot{\Omega} = \frac{2cz^2 \dfrac{\partial F}{\partial (z^2)}}{(x\dot{z} - z\dot{x})^2 + (y\dot{z} - z\dot{y})^2}. \tag{7.17'}$$

Формула (7.17′) показывает, что знак величины $c \cdot \dot{\Omega}$ таков же, как и знак величины $\partial F/\partial(z^2)$. Поэтому, если $\dfrac{\partial F}{\partial (z^2)} < 0$, то скорость изменения долготы узла противоположна по знаку постоянной c, т. е. скорости изменения угла v. Иными словами, в этом случае линия узлов перемещается в направлении, противоположном направлению движения точки P. Наоборот, если мы имеем $\dfrac{\partial F}{\partial (z^2)} > 0$, то направление вращения линии узлов совпадает с направлением движения.

Пусть, например, гравитационное поле вызывается телом, разложение силовой функции которого дается формулой (7.6), в которой все коэффициенты с нечетными значками суть нули. Тогда имеем

$$F = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{r^{2k+1}} P_{2k}(\alpha), \quad \alpha = \frac{z}{r}, \tag{7.18}$$

откуда находим

$$\frac{\partial F}{\partial (z^2)} = \frac{f}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k}}{r^{2k+3}} \cdot \frac{P'_{2k}(\alpha)}{\alpha} = \frac{f}{2} \left\{ \frac{3A_2}{r^5} + \ldots \right\}. \quad (7.18')$$

Если теперь $A_2 < 0$, как это имеет место для гравитационного поля Земли (а также для любого однородного сжатого эллипсоида вращения), то $\frac{\partial F}{\partial (z^2)} < 0$ и линия узлов вращается в направлении, противоположном движению.

Но можно указать такие гравитационные поля, для которых $\frac{\partial F}{\partial (z^2)} > 0$. Таков, например, случай однородного, вытянутого эллипсоида вращения, где все коэффициенты A_{2k} положительны.

Заметим, что приведенное выше условие имеет простой механический смысл, на который невозможно не обратить внимания. Действительно, вообразим материальное тело или систему таких тел, которые обладают симметрией относительно некоторой оси и некоторой плоскости, перпендикулярной к этой оси. Если притягивающие массы в основном сосредоточены вблизи указанной плоскости, то составляющая равнодействующей всех сил притяжения на материальную точку, лежащую вне плоскости симметрии, параллельная оси вращения, обязательно будет направлена к *началу координат*, а поэтому величина

$$\frac{\partial F}{\partial (z^2)} = \frac{1}{2z} \frac{\partial F}{\partial z}$$

будет отрицательна, независимо от того, лежит ли точка P в области положительных или отрицательных аппликат.

Наоборот, если притягивающие массы сосредоточены в основном вне плоскости симметрии, то составляющая силы притяжения, параллельная оси симметрии, будет направлена от *начала координат* и $\frac{\partial F}{\partial (z^2)}$ будет положительной.

Простейшим примером такого случая может служить поле, вызванное двумя равными массами, лежащими на оси Oz на одинаковых расстояниях c от начала координат.

В этом случае

$$U = F(r, z) = fm\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+c)^2},$$

и мы находим

$$\frac{\partial F}{\partial (z^2)} = \frac{fmc}{2z}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).$$

Но при $z > 0$ имеем $r_1 < r_2$, а при $z < 0$, наоборот, $r_1 > r_2$. Поэтому во всех случаях рассматриваемая производная есть величина положительная.

4. Мы уже отметили, что в случае, когда силовое поле обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, уравнения движения допускают решения, в которых $z = \dot{z} = 0$. Рассмотрим частный случай таких плоских решений, в котором орбита точки P есть окружность с центром в начале координат.

В самом деле, уравнения (7.13) имеют частное решение

$$\rho = a, \quad z = 0, \tag{7.19}$$

где постоянная a есть корень уравнения

$$W'_\rho(\rho,\ 0) = 0, \tag{7.20}$$

которое ввиду формулы (7.12) может быть написано также в следующей форме:

$$\frac{c^2}{\rho^3} + \Phi'_\rho(\rho,\ 0) = 0. \tag{7.20$'$}$$

Это уравнение имеет действительные решения только в том случае, когда производная $\Phi'_\rho(\rho,\ 0)$ имеет отрицательное значение, по крайней мере для некоторых значений ρ.

Так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial F}{\partial r},$$

то условие существования действительных решений уравнения (7.20) выполняется, когда сила притяжения в плоскости симметрии поля направлена к началу координат.

Может случиться, что производная $\Phi'_\rho(\rho,\ 0)$ будет сохранять отрицательный знак для всех значений ρ в некотором промежутке $0 < a_1 \leqslant \rho \leqslant a_2$. Тогда каждому значению a в этом промежутке соответствует некоторое c^2, определяемое из уравнения (7.20′).

Всякому действительному частному решению (7.19) соответствует круговое движение с постоянной угловой скоростью. Действительно, формула (7.13″) дает при $\rho = a$

$$v = v_0 + n_0 (t - t_0), \tag{7.21}$$

где

$$n_0 = \frac{c}{a^2} \tag{7.21$'$}$$

есть постоянная угловая скорость рассматриваемого движения.

Это круговое движение, очевидно, есть движение периодическое с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{|n_0|} = \frac{2\pi a^2}{|c|}. \tag{7.21''}$$

Заметим еще, что рассматриваемому круговому движению соответствуют следующие начальные значения цилиндрических координат и их первых производных:

$$\rho_0 = a, \quad \dot{\rho}_0 = 0, \quad z_0 = \dot{z}_0 = 0, \quad \dot{v}_0 = n_0. \tag{7.22}$$

Рассмотрим теперь движения, для которых начальные значения ρ_0, $\dot{\rho}_0$, z_0, $\dot{z}_0$ мало отличаются от значений этих же величин в каком-либо круговом движении.

Пусть начальные условия такого нового решения системы (7.13) будут

$$\rho_0 = a + x_0, \quad \dot{\rho}_0 = \dot{x}_0, \; z_0, \; \dot{z}_0, \tag{7.23}$$

где x_0, $\dot{x}_0$, z_0, $\dot{z}_0$ — малые по абсолютной величине числа.

Иными словами, будем рассматривать постоянное решение системы (7.13) как *невозмущенное*, а решение той же системы с начальными данными (7.23) — как *возмущенное*.

Положим теперь для всякого значения t *)

$$\rho = a + x. \tag{7.24}$$

Тогда возмущенное решение, близкое в начальный момент t_0 к невозмущенному, определится следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x} = X(x, z), \quad \ddot{z} = Z(x, z), \tag{7.25}$$

где

$$X(x, z) = W'_x(a + x, z), \quad Z(x, z) = W'_z(a + x, z), \tag{7.26}$$

причем

$$X(0, 0) = Z(0, 0) = 0, \tag{7.26'}$$

так что система значений

$$x = 0, \quad z = 0 \tag{7.27}$$

является нулевым решением уравнений (7.25), соответствующим невозмущенному решению $\rho = a$, $z = 0$ системы (7.13).

Предположим теперь (и это будет достаточно общий случай), что функция $W(a + x, z)$ голоморфна в некоторой области начала координат (т. е. системы значений $x = z = 0$). Тогда мы можем написать

$$W(a + x, z) = \\ = \frac{x^2}{2} \cdot W''_{xx}(a, 0) + xz \cdot W''_{xz}(a, 0) + \frac{z^2}{2} \cdot W''_{zz}(a, 0) + \ldots, \tag{7.28}$$

*) Величину x, введенную здесь, не следует смешивать с координатой x точки P в системе осей $(Oxyz)$.

где невыписанные члены выше второго порядка и ряд сходится абсолютно в некоторой окрестности начала координат.

Но в силу (7.12) мы имеем

$$W(a+x,\ z) = -\frac{c^2}{2(a+x)^2} + \Phi(a+x,\ z), \tag{7.28'}$$

откуда находим без труда

$$\left.\begin{aligned} &W''_{xx}(a,\ 0) = -\frac{3c^2}{a^4} + \Phi''_{xx}(a,\ 0) = \frac{3}{a}\Phi'_x(a,\ 0) + \Phi''_{xx}(a,\ 0),\\ &W''_{xz}(a,\ 0) = 0,\\ &W''_{zz}(a,\ 0) = \Phi''_{zz}(a,\ 0). \end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

Положим

$$W''_{xx}(a,\ 0) = -m^2, \quad W''_{zz}(a,\ 0) = -n^2. \tag{7.29'}$$

Тогда первые члены разложения функции $W(a+x,\ z)$ напишутся следующим образом:

$$W(a+x,\ z) = -\frac{1}{2}m^2x^2 - \frac{1}{2}n^2z^2 + \ldots \tag{7.30}$$

а уравнения (7.25) примут вид

$$\ddot{x} = -m^2x + \ldots,\ \ddot{z} = -n^2z + \ldots \tag{7.30'}$$

Очевидно, что система (7.30′) имеет интеграл, являющийся следствием интеграла (7.13′) системы (7.13), который напишется в виде

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + m^2x^2 + n^2z^2 + \ \ldots\ = 2\bar{h}. \tag{7.31}$$

Левая часть этого интеграла есть голоморфная функция величин $\dot{x}$, $\dot{z}$, x, z в некоторой окрестности начала координат, наинизшие члены разложения которой образуют квадратичную форму.

Эта квадратичная форма заведомо не будет знакоопределенной (положительной), если хотя бы одно из двух чисел m^2 и n^2 не будет положительным.

Если, притом одно из этих чисел отрицательно, то невозмущенное решение $x = 0$, $z = 0$ системы (7.30′) будет неустойчиво (в смысле Ляпунова). Это следует просто из того, что одно из двух уравнений

$$\varkappa^2 + m^2 = 0, \quad \varkappa^2 + n^2 = 0$$

будет иметь при сказанном условии вещественный положительный корень.

Если же оба числа m^2 и n^2 положительны, то квадратичная форма в равенстве (7.31) есть знакоопределенно положительная и невозмущенное движение будет устойчивым (но не асимптотически!).

Действительно, уравнения (7.30′) можно привести к каноническому виду, полагая

$$\dot{x}=\xi, \quad \dot{z}=\zeta$$

и

$$2H=\xi^2+\zeta^2-2W, \tag{7.32}$$

вследствие чего уравнения (7.30′) примут форму

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=\frac{\partial H}{\partial \xi}, & \dot{\xi}&=-\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{z}&=\frac{\partial H}{\partial \zeta}, & \dot{\zeta}&=-\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{7.32′}$$

Так как

$$2H=\xi^2+\zeta^2+m^2x^2+n^2z^2+\ \ldots$$

при $m^2>0$, $n^2>0$ есть знакоопределенно положительная функция, то по первой теореме прямого метода Ляпунова нулевое решение системы (7.32′) *устойчиво.*

Возвращаясь теперь к круговому движению, определяемому начальными условиями (7.22), мы можем заключить, что это движение будет устойчивым в смысле Ляпунова относительно величин $\rho, \dot{\rho}$, z, $\dot{z}$, если выполняются условия

$$\frac{3}{a}\Phi'_{\rho}(a,\ 0)+\Phi''_{\rho\rho}(a,\ 0)<0, \quad \Phi''_{zz}(a,\ 0)<0, \tag{7.33}$$

которые и являются достаточными условиями устойчивости.

Иными словами, круговое движение в задаче Фату при выполнении условий (7.33) обладает *орбитальной устойчивостью.*

Полной же устойчивости здесь нет, как и в случае кеплеровского движения и по той же причине.

Если хотя бы одно из условий (7.33) выполняется в противоположном смысле, то круговое движение в задаче Фату будет орбитально неустойчиво.

Такого рода случай мы имеем, например, в упомянутой уже выше задаче движения в гравитационном поле, вызванном двумя неподвижными притягивающими центрами с равными массами.

Важнейшим примером устойчивости кругового движения является случай гравитационного поля Земли, если считать (что, конечно, справедливо только в некотором приближении) это поле, обладающим симметрией и относительно оси вращения Земли, и относительно ее экватора.

§ 2. Периодические решения задачи Фату

1. Рассмотрим опять уравнения (7.25) или (7.32′) в предположении, что имеют место достаточные условия устойчивости нулевого решения, т. е. что m^2 и n^2 — числа положительные.

Тогда определяющее уравнение системы первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней

$$\pm m\sqrt{-1}, \quad \pm n\sqrt{-1}, \tag{7.34}$$

каждому из которых соответствует одно периодическое решение системы в вариациях с двумя произвольными постоянными.

Но уравнения (7.32′) имеют вдобавок голоморфный интеграл, наинизшие члены разложения которого образуют знакоопределенную квадратичную форму. Поэтому, если ни одно из отношений m/n, n/m не представляет целого числа, то по теореме Ляпунова о периодических решениях система (7.32′) также будет иметь два периодических решения, каждое с двумя произвольными постоянными.

Каждое из этих периодических решений представится в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням некоторой произвольной постоянной, коэффициентами которых являются конечные ряды синусов и косинусов некоторой переменной, пропорциональной времени.

Как следует из теоремы Ляпунова, нами только что упомянутой, ряды эти будут абсолютно сходящимися при всех значениях времени, пока модуль постоянной (по степеням которой эти ряды расположены) не превосходит некоторого, отличного от нуля предела.

Для составления указанных рядов мы применим метод Ляпунова непосредственно к системе уравнений второго порядка (7.25), как это уже было сделано один раз при нахождении периодических решений вблизи точек либрации.

Пусть λ обозначает какое-либо из чисел m и n, а σ — произвольную постоянную. Положим

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2\sigma^2 + h_3\sigma^3 + \ \ldots), \tag{7.35}$$

где h_k — неопределенные коэффициенты, и введем в уравнения (7.25) новую независимую переменную τ посредством подстановки

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}. \tag{7.35′}$$

Преобразованным уравнениям

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{T^2}{4\pi^2}\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{T^2}{4\pi^2}\frac{\partial W}{\partial z} \tag{7.36}$$

стараемся удовлетворить рядами, расположенными по степеням произвольной постоянной σ:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k x_k, \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k z_k, \tag{7.36′}$$

причем неопределенными коэффициентами h_k распоряжаемся таким образом, чтобы все функции x_k, z_k вышли бы периодическими функциями от τ с общим периодом 2π.

Составим теперь уравнения, определяющие коэффициенты рядов (7.36′). Так как функция $\Phi(\rho, z)$ по условию есть четная функция от координаты z, то разложение функции $W(a+x, z)$ по степеням величин x и z будет содержать только четные степени z и может быть написано следующим образом:

$$W = -\frac{1}{2}m^2x^2 - \frac{1}{2}n^2z^2 + W_3 + W_4 + \ldots, \tag{7.37}$$

где

$$W_k = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} W_{k,s}x^{k-2s}z^{2s} \quad (k=3, \ldots) \tag{7.37′}$$

суть однородные многочлены степени k с постоянными коэффициентами, которые легко выражаются через значения частных производных функции $\Phi(\rho, z)$ при $\rho = a$, $z = 0$. Имея в виду определить коэффициенты рядов (7.36′) в членах до третьего порядка включительно, положим для удобства

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{1}{3}\alpha x^3 + \beta x z^2, \\ W_4 &= \frac{1}{4}\alpha_1 x^4 + \frac{1}{2}\beta_1 x^2 z^2 + \frac{1}{4}\gamma_1 z^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Тогда уравнения (7.36) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{T^2}{4\pi^2}\left[-m^2x + \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)}(k-2s)W_{k,s}x^{k-2s-1}z^{2s}\right] = \\ &= \frac{1}{\lambda^2}(1 + 2h_2\sigma^2 + 2h_3\sigma^3 + \ldots)[-m^2x + \alpha x^2 + \\ &\qquad + \beta z^2 + \alpha_1 x^3 + \beta_1 x z^2 + \ldots], \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= \frac{T^2}{4\pi^2}\left[-n^2z + \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)}2sW_{k,s}x^{k-2s}z^{2s-1}\right] = \\ &= \frac{1}{\lambda^2}(1 + 2h_2\sigma^2 + 2h_3\sigma^3 + \ldots)[-n^2z + 2\beta x z + \\ &\qquad + \beta_1 x^2 z + \gamma_1 z^3 + \ldots]. \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

Заметим, что разложение, стоящее в квадратных скобках первого уравнения (7.38), содержит z только в четных степенях, а такое же разложение во втором уравнении содержит z только в нечетных степенях.

Подставляя в эти уравнения вместо x и z ряды (7.36′) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ в левых и правых частях равенств, мы получим для определения функций x_k, z_k следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\tau^2} &= -\frac{m^2}{\lambda^2}x_1, \\ \frac{d^2z_1}{d\tau^2} &= -\frac{n^2}{\lambda^2}z_1, \end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{d\tau^2} &= -\frac{m^2}{\lambda^2}x_2 + \frac{\alpha}{\lambda^2}x_1^2 + \frac{\beta}{\lambda^2}z_1^2, \\ \frac{d^2z_2}{d\tau^2} &= -\frac{n^2}{\lambda^2}z_2 + \frac{2\beta}{\lambda^2}x_1z_1, \end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_3}{d\tau^2} &= -\frac{m^2}{\lambda^2}x_3 - \frac{2h_2m^2}{\lambda^2}x_1 + \frac{2\alpha}{\lambda^2}x_1x_2 + \\ &\qquad + \frac{2\beta}{\lambda^2}z_1z_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda^2}x_1^3 + \frac{\beta_1}{\lambda^2}x_1z_1^2, \\ \frac{d^2z_3}{d\tau^2} &= -\frac{n^2}{\lambda^2}z_3 - \frac{2h_2n^2}{\lambda^2}z_1 + \frac{2\beta}{\lambda^2}(x_1z_2 + x_2z_1) + \\ &\qquad + \frac{\beta_1}{\lambda^2}x_1^2z_1 + \frac{\gamma_1}{\lambda^2}z_1^3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

Вообще уравнения, определяющие функции x_k, z_k, имеют следующую структуру ($k > 1$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_k}{d\tau^2} + \frac{m^2}{\lambda^2}x_k &= X_k(h_{k-1}, \ldots, h_2;\ x_1, z_1, \ldots, x_{k-1}, z_{k-1}), \\ \frac{d^2z_k}{d\tau^2} + \frac{n^2}{\lambda^2}z_k &= Z_k(h_{k-1}, \ldots, h_2;\ x_1, z_1, \ldots, x_{k-1}, z_{k-1}), \end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

где X_k и Z_k — многочлены k-й степени относительно своих аргументов, однородные относительно нижних индексов, т. е. в каждом члене многочленов X_k и Z_k сумма нижних индексов аргументов равна индексу k определяемой функции. Кроме того, отметим, что каждый член многочлена Z_k обязательно содержит множителем по крайней мере одну из величин z_s ($s = 1, 2, \ldots, k-1$).

Когда определены уже все функции x_s, z_s, для которых $s < k$, и выбраны постоянные h_s, для которых $s < k-1$, так, чтобы все эти функции были периодическими с одним и тем же периодом 2π, то величины X_k, Z_k в уравнениях (7.42) сделаются известными периодическими функциями от τ с периодом 2π и содержат неопределенную еще постоянную h_{k-1}.

Поэтому из уравнений (7.42) мы определим следующую пару функций x_k, z_k, выбирая следующую постоянную h_{k-1} так, чтобы эти функции также вышли периодическими с периодом 2π.

Так как (на основании теоремы Ляпунова) нам известно заранее, что периодические решения рассматриваемого типа существуют, то процесс определения коэффициентов рядов (7.36′) и (7.35) можно продолжать сколь угодно далеко, и мы можем получить искомое периодическое решение с какой угодно степенью точности.

Разумеется, при интегрировании каждой из систем типа (7.42) будут входить произвольные постоянные, которые, вообще говоря, можно выбирать как угодно, так как этот выбор подчинен единственному условию, чтобы периодические ряды (7.36′) были сходящимися.

Действительно, по теореме Ляпунова каждое периодическое решение рассматриваемого типа должно содержать две произвольные постоянные, одна из которых σ, а другая (несущественная) — начальный момент t_0.

Переходя теперь к фактическому определению функций x_k, z_k, мы должны различать два случая, так как λ обозначает здесь или m, или n.

2. Пусть $\lambda = m$. Тогда второе из уравнений (7.39) примет вид

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} = -\frac{n^2}{m^2} z_1. \tag{7.43}$$

Величины m и n по формулам (7.29′) зависят только от радиуса a исходной круговой орбиты (невозмущенного движения), а стало быть, каждое из отношений n/m и m/n будет функцией от a. Для нахождения периодических решений, существование которых обусловливается теоремой Ляпунова, мы должны исключить из рассмотрения такие орбиты (если они существуют), для которых хотя бы одно из этих отношений есть целое число.

Но если n/m не есть целое число, то единственная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая уравнению (7.43), есть нуль, и мы имеем

$$z_1 = 0. \tag{7.43′}$$

Тогда легко видеть, что на тех же основаниях мы будем иметь $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, ... Но если все функции z_s, для которых $s < k$, суть нули, то по свойству функций Z_k мы будем иметь $Z_k \equiv 0$, а следовательно, уравнение, определяющее z_k, имеет такой же вид, как и (7.43), и мы найдем $z_k = 0$.

Следовательно, будем иметь

$$z=0, \tag{7.43''}$$

и рассматриваемое периодическое решение — плоское.

Определим теперь функции x_k. При определении этих функций будут возникать постоянные, которые, как указано, можно выбирать произвольно. Будем выбирать их таким образом, чтобы начальные значения всех функций x_k и их первых производных по τ были равны нулю для $k>1$ и чтобы начальное значение функции x_1 было равно единице. Иными словами, пусть

$$\left.\begin{aligned} &x_1(0)=1, \quad \dot{x}_1(0)=0,\\ &x_k(0)=0, \quad \dot{x}_k(0)=0 \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

При этом выборе произвольных постоянных величина, по степеням которой представляется разложение функции в интересующем нас периодическом решении, будет просто равна начальному значению этой функции, т. е. мы будем иметь

$$x(0)=\sigma. \tag{7.44'}$$

Переходим к определению функций x_k. Первое из уравнений (7.39) при $\lambda = m$ имеет вид

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}=-x_1, \tag{7.45}$$

и единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (7.44), будет, очевидно,

$$x_1=\cos\tau. \tag{7.45'}$$

Подставляя найденное x_1 (и $z_1=0$) в первое из уравнений (7.40), мы получим

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+x_2=\frac{\alpha}{2m^2}(1+\cos 2\tau). \tag{7.46}$$

Периодическое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (7.44), напишется, как легко проверить, в виде

$$x_2=\frac{\alpha}{6m^2}(3-2\cos\tau-\cos 2\tau). \tag{7.46'}$$

Перейдем далее к определению функции x_3, где нам впервые встретится необходимость выбора неопределенных коэффициентов h_k. Действительно, подставляя в первое из уравнений (7.41) вместо x_1 и x_2 найденные их выражения (а вместо z_1 и z_2 — нули), мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_3}{d\tau^2}+x_3=\left(-2h_2+\frac{5\alpha^2}{6m^4}+\frac{3\alpha_1}{4m^2}\right)\cos\tau-\frac{\alpha^2}{3m^4}-&\\ -\frac{\alpha^2}{3m^4}\cos 2\tau+\left(\frac{\alpha_1}{4m^2}-\frac{\alpha^2}{3m^4}\right)\cos 3\tau.&\end{aligned} \tag{7.47}$$

Чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо, чтобы в правой его части отсутствовал член, содержащий $\cos\tau$. Поэтому постоянную h_2 нужно выбрать таким образом, чтобы коэффициент при $\cos\tau$ был равен нулю, что дает для постоянной h_2 следующее выражение:

$$h_2 = \frac{5\alpha^2}{12m^4} + \frac{3\alpha_1}{8m^2}. \qquad (7.47')$$

Выбрав h_2, мы найдем после этого x_3 как периодическую функцию τ с периодом 2π, удовлетворяющую уравнению (7.47) и начальным условиям (7.44), в следующем виде:

$$x_3 = A_3^{(0)} + A_3^{(1)}\cos\tau + A_3^{(2)}\cos 2\tau + A_3^{(3)}\cos 3\tau, \qquad (7.48)$$

где постоянные коэффициенты $A_3^{(i)}$ — функции радиуса исходной круговой орбиты a, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} A_3^{(0)} &= -\frac{\alpha^2}{3m^4}, & A_3^{(1)} &= \frac{\alpha_1}{32m^2} + \frac{13\alpha^2}{72m^4},\\ A_3^{(2)} &= \frac{\alpha^2}{9m^4}, & A_3^{(3)} &= \frac{\alpha^2}{24m^4} - \frac{\alpha_1}{32m^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.48')$$

Подобным же образом поступаем и далее. Нетрудно убедиться, что после того как все функции x_s, для которых $s < k$, и все постоянные h_s, для которых $s < k-1$, уже определены, уравнение, определяющее функцию x_k, напишется в виде

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2} + x_k = \widetilde{A}_k^{(0)} + \left(-2h_{k-1} + \widetilde{A}_k^{(1)}\right)\cos\tau + \widetilde{A}_k^{(2)}\cos 2\tau + \ldots$$
$$\ldots + \widetilde{A}_k^{(k)}\cos k\tau, \qquad (7.49)$$

где все $\widetilde{A}_k^{(i)}$ — постоянные коэффициенты, зависящие известным образом от радиуса a исходной круговой орбиты.

Для того чтобы существовало периодическое решение последнего уравнения, необходимо, чтобы в правой его части не было члена с $\cos\tau$, для чего нужно обратить в нуль коэффициент $-2h_{k-1} + \widetilde{A}_k^{(1)}$, что дает для неопределенной еще постоянной h_{k-1} следующее выражение:

$$h_{k-1} = \frac{1}{2}\widetilde{A}_k^{(1)}. \qquad (7.50)$$

Написав затем общее решение уравнения (7.49) и определив две произвольные постоянные так, чтобы выполнялись условия (7.44), мы получим функцию x_k в виде следующего тригонометрического многочлена:

$$x_k = \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)}\cos i\tau, \qquad (7.51)$$

где все $A_k^{(i)}$ — известные постоянные коэффициенты, зависящие только от радиуса a исходной круговой орбиты и удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)} = 0. \tag{7.51'}$$

Таким образом, плоское периодическое решение системы (7.36) определится формулой

$$x = \sigma \cdot \cos\tau + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma^k \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)} \cos i\tau, \tag{7.52}$$

где τ и T находятся по формулам (7.35) и (7.35′). Ясно, что функция x есть также периодическая функция времени t с периодом T, зависящим и от радиуса a исходной круговой орбиты, и от постоянной σ, которая в силу (7.44′) представляет начальное значение (при $t = t_0$, или при $\tau = 0$) функции x. А это начальное значение в силу (7.24) определится формулой

$$x(0) = \sigma = \rho_0 - a. \tag{7.52'}$$

3. Теперь рассмотрим решение, соответствующее случаю $\lambda = n$. При интегрировании уравнений вида (7.42) в этом случае мы будем выбирать произвольные постоянные таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned} &z_1(0) = 1, \quad \dot{z}_1(0) = 0, \\ &z_k(0) = 0, \quad \dot{z}_k(0) = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

а все остальные произвольные постоянные будем полагать равными нулю.

При этих условиях уравнения (7.39), которые напишутся в виде

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = -\frac{m^2}{n^2} x_1, \quad \frac{d^2z_1}{d\tau^2} = -z_1, \tag{7.54}$$

дают

$$x_1 = 0, \quad z_1 = \cos\tau. \tag{7.54'}$$

Уравнения (7.40) приведутся тогда к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \frac{m^2}{n^2} x_2 = \frac{\beta}{2n^2}(1 + \cos 2\tau), \\ &\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + z_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

откуда, при принятых условиях относительно произвольных постоянных, найдем

$$\left.\begin{aligned} &x_2 = \frac{\beta}{2m^2} + \frac{\beta}{2(m^2 - 4n^2)} \cos 2\tau, \\ &z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.55'}$$

Далее, уравнения (7.41) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_3}{d\tau^2}+\frac{m^2}{n^2}x_3=0,\\ &\frac{d^2z_3}{d\tau^2}+z_3=\left(-2h_2+\widetilde{A}_3^{(1)}\right)\cos\tau+\widetilde{A}_3^{(3)}\cos 3\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (7.56)$$

где положено

$$\widetilde{A}_3^{(1)}=\frac{\beta^2}{2n^2(m^2-4n^2)}+\frac{\beta^2}{m^2n^2}+\frac{3\gamma_1}{4n^2},$$

$$\widetilde{A}_3^{(3)}=\frac{\gamma_1}{4n^2}+\frac{\beta^2}{2n^2(m^2-4n^2)}.$$

Первое из этих уравнений дает сразу

$$x_3=0, \qquad (7.56')$$

а во втором постоянную h_2 нужно выбрать так, чтобы исчез член, содержащий $\cos\tau$, т. е. нужно положить

$$h_2=\frac{1}{2}\widetilde{A}_3^{(1)}. \qquad (7.56'')$$

После этого уравнение, определяющее функцию z_3, примет вид

$$\frac{d^2z_3}{d\tau^2}+z_3=A\cdot\cos 3\tau, \qquad (7.57)$$

где

$$A=\frac{\gamma_1}{4n^2}+\frac{\beta^2}{2n^2(m^2-4n^2)}.$$

Периодическое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (7.53), найдется по формуле

$$z_3=\frac{1}{8}A(\cos\tau-\cos 3\tau). \qquad (7.57')$$

Обращаясь далее к следующим уравнениям, выпишем только одно из них, определяющее функцию z_4. Легко проверить, что это уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2z_4}{d\tau^2}+z_4=-2h_3\cos\tau \qquad (7.58)$$

откуда следует, что постоянная h_3 должна быть нулем.

Полагая $h_3=0$, из предыдущего уравнения найдем

$$z_4=0. \qquad (7.58')$$

Подобным же образом определятся и все остальные коэффициенты рядов (7.36′), представляющих искомое периодическое решение. При этом все функции z_s с четными индексами и все функции x_s и постоянные h_s с нечетными индексами выйдут равными нулю, так что ряд, определяющий координату z, расположится по нечетным степеням параметра σ, а ряды, определяющие функцию x и период решения T, расположатся по четным степеням σ.

Это простое свойство исследуемого периодического решения можно доказать, пользуясь методом полной индукции.

Действительно, допустим, что мы уже определили все коэффициенты рядов для x и z до некоторого номера s включительно и все коэффициенты ряда для T соответственно до номера $s-1$ включительно и нашли, что

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x_3 = x_5 = \ldots &= 0, \\ z_2 = z_4 = z_6 = \ldots &= 0, \\ h_3 = h_5 = h_7 = \ldots &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.59}$$

Рассмотрим при этих условиях определение функций x_{s+1}, z_{s+1} и постоянной h_s.

Уравнения, определяющие функции x_{s+1}, z_{s+1}, суть уравнения (7.42) для $k = s+1$, которые получаются путем сравнения коэффициентов при σ^{s+1} в уравнениях (7.38). Члены, содержащие множителем σ^{s+1} в правых частях уравнений (7.38), получаются, очевидно, от умножения членов, содержащих σ в степени, не превышающей s в разложении T^2, на разложения по степеням σ членов вида $x^{k_1}z^{k_2}$, где должно быть $k_1 + k_2 \leqslant s+1$.

Поэтому, если s — число четное, то из разложений $x^{k_1}z^{k_2}$ мы должны брать только члены с нечетными степенями σ. Но в первом из уравнений (7.38) все такие члены суть нули ввиду условий (7.59) и ввиду того, что k_2 — всегда число четное. Поэтому уравнение, определяющее функцию x_{s+1}, имеет вид

$$\frac{d^2 x_{s+1}}{d\tau^2} + \frac{m^2}{n^2} x_{s+1} = 0, \tag{7.60}$$

откуда следует, что функция x_{s+1} с нечетным индексом $s+1$ будет равна нулю.

Уравнение, определяющее z_{s+1}, напишется в виде

$$\frac{d^2 z_{s+1}}{d\tau^2} + z_{s+1} = \\ = Z_{s+1}(h_2, h_4, \ldots, h_s;\ x_2, \ldots, x_s;\ z_1, \ldots, z_{s-1}), \tag{7.61}$$

из которого определится периодическая функция z_{s+1} при соответствующем выборе постоянной h_s. Так как Z_{s+1} есть однородная функция относительно нижних значков всех своих аргументов, то после подстановки вместо x_i, z_i уже полученных их значений она представится в виде тригонометрического многочлена порядка $s+1$, расположенного только по косинусам нечетных кратных τ.

Такой же вид, разумеется, будет иметь и функция z_{s+1}.

Если же s — число нечетное, то в уравнении (7.61) ввиду условий (7.59) и ввиду того, что в этом случае k_1 — всегда число нечетное, обратятся в нуль все члены, кроме одного, и уравнение, определяющее следующую функцию z_{s+1} с четным индексом $s+1$, напишется в виде

$$\frac{d^2 z_{s+1}}{d\tau^2} + z_{s+1} = -2h_s \cos\tau. \tag{7.61'}$$

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, должно быть $h_s = 0$ (s нечетное). Если же h_s — нуль, то единственное периодическое решение уравнения (7.61'), удовлетворяющее условиям (7.53), есть нуль.

Но мы уже показали непосредственным вычислением, что $x_1 = x_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $h_3 = 0$. Следовательно, указанное свойство доказано полностью.

Отметим еще для полноты, что уравнение, определяющее функцию x_{s+1} (с четным индексом $s+1$), имеет вид

$$\frac{d^2 x_{s+1}}{d\tau^2} + \frac{m^2}{n^2} x_{s+1} = \\ = X_{s+1}(h_2, \ldots, h_{s-1}, x_2, \ldots, x_{s-1}, z_1, \ldots, z_s). \tag{7.62}$$

Так как функция X_{s+1} однородна относительно нижних индексов всех своих аргументов и $s+1$ — число четное, то после подстановки вместо x_i, z_i найденных уже их значений X_{s+1} представится в виде тригонометрического многочлена порядка $s+1$, расположенного по косинусам четных кратных аргумента τ. Такой же вид будет иметь и частное периодическое решение последнего уравнения.

Ввиду доказанного рассматриваемое периодическое решение представится следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} A_{2k}^{(2s)} \cos 2s\tau, \\ z &= \sigma\cos\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} A_{2k+1}^{(2s+1)} \cos(2s+1)\tau, \end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

где по-прежнему

$$\tau = \frac{2\pi(t-t_0)}{T},$$

а период T определяется рядом вида

$$T = \frac{2\pi}{n}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k}\sigma^{2k}\right). \tag{7.63'}$$

Так как при $t=t_0$ имеем $\tau=0$, то

$$z_0=\sigma, \quad \dot{z}_0=0, \tag{7.63''}$$

т. е. σ есть начальное значение функции z.

Заметим в заключение, что начальное значение функции x не может быть взято произвольно и определяется в зависимости от начального значения z следующей очевидной формулой:

$$x_0=\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} A_{2k}^{(2s)}.$$

В отличие от периодического решения, соответствующего случаю $\lambda = m$, которое мы назвали *плоским*, решение, определяемое формулами (7.63), мы будем называть *пространственным* периодическим решением.

§ 3. Свойства движения, соответствующего периодическому решению

1. В предыдущем параграфе мы нашли два частных периодических решения уравнений (7.25), определяющих линейные координаты ρ и z в движении точки P, близком к круговому (невозмущенному!) движению.

Рассмотрим теперь определение угловой координаты и выявим некоторые характерные свойства траекторий, вьющихся в непосредственной окрестности окружности радиуса a.

Из интеграла площадей в плоскости (xOy) мы имеем, предполагая, что $c \neq 0$,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{c}{\rho^2}. \tag{7.64}$$

Переходя к переменной τ, мы напишем последнее уравнение в виде

$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{cT}{2\pi}\cdot(a+x)^{-2}, \tag{7.64'}$$

откуда найдем

$$v-v_0=\frac{cT}{2\pi}\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(a+x)^2}. \tag{7.65}$$

Величина x и в плоском и в пространственном периодических решениях представляется рядом, расположенным по степеням параметра σ, коэффициентами которого являются конечные ряды косинусов целых кратностей τ. Ряды эти сходятся абсолютно для всякого значения τ, пока $|\sigma|$ не превосходит некоторого, отличного от нуля предела. Поэтому простой перестановкой членов ряды эти можно превратить в тригонометрические, коэффициентами которых будут бесконечные ряды, расположенные по степеням σ и абсолютно сходящиеся в той же области значений σ.

Следовательно, мы можем написать

$$a + x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\tau, \tag{7.66}$$

где

$$a_k = \sum_{s=k}^{\infty} a_k^{(s)} \sigma^s. \tag{7.66'}$$

Формулы (7.66) и (7.66′) одинаково пригодны и в случае плоского, и в случае пространственного периодического решения. Однако можно заметить, что в последнем случае мы имеем

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \sum_{s=k}^{\infty} a_{2k}^{(2s)} \sigma^{2s}.$$

Функция $(a + x)^{-2}$, ввиду (7.66), также может быть представлена в виде абсолютно и равномерно сходящегося тригонометрического ряда, расположенного по косинусам целых кратностей τ, так что мы имеем

$$(a + x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \cos k\tau, \tag{7.67}$$

причем коэффициенты вычисляются по известным формулам

$$\bar{a}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\tau \cdot d\tau}{(a + x)^2} \tag{7.67'}$$

и суть функции от σ, представляемые рядами такого же типа, как и ряды (7.66′). Подставляя разложение (7.67) в формулу (7.65) и интегрируя почленно, мы получим

$$v - v_0 = b_0\tau + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\tau, \tag{7.68}$$

где положено

$$b_0 = \frac{cT}{2\pi} \bar{a}_0, \quad b_k = \frac{cT}{2k\pi} \bar{a}_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7.68'}$$

Коэффициенты b_k зависят от c, a и σ, но так как c связано с a уравнением (7.20′), то все b_k зависят только от a и σ, являясь голоморфными функциями σ при численно достаточно малых значениях последнего.

Легко видеть, что эти коэффициенты также представляются рядами вида

$$b_k = \sum_{s=k}^{\infty} b_k^{(s)} \sigma^s, \tag{7.69}$$

причем нетрудно проверить (см. формулу (7.21″)), что

$$b_0^{(0)} = \pm 1 \tag{7.69′}$$

(плюс соответствует прямому движению, минус — обратному).

Поэтому, когда время изменяется на T, т. е. τ получает приращение 2π, долгота v получит приращение

$$\Delta v = 2\pi b_0 = 2\pi \left[\pm 1 + \sum_{s=1}^{\infty} b_0^{(s)} \sigma^s\right], \tag{7.70}$$

которое при численно малых значениях σ весьма мало отличается от $\pm 2\pi$.

Но в момент $t_0 + T$ координаты $\rho = a + x$ и z принимают свои начальные значения $\rho_0 = a + x_0$ и z_0 (для случая $\lambda = m$, $z_0 = 0$), а $v(t_0 + T) = v_0 + 2\pi b_0$. Поэтому, так как b_0, вообще говоря, есть число иррациональное, то траектория не замыкается и движение точки P, соответствующее какому-либо из двух периодических решений системы (7.25), само не является периодическим.

Только в исключительном случае, когда величина $|b_0|$ окажется равной рациональному числу вида p/q (p и q — целые положительные числа), движение также будет периодическим. Действительно, в этом случае, при изменении t на qT, долгота v получит приращение, равное $2\pi q$, а ρ и z не изменятся. Движение будет периодическим с периодом qT, и траектория точки P замкнется после p оборотов.

2. Рассмотрим подробнее случай плоского движения, соответствующего плоскому периодическому решению системы (7.25).

В этом случае $z = 0$, а ρ определится формулой

$$\rho = a + \sigma \cos\tau + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma^k \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)} \cos i\tau, \tag{7.71}$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношению (7.51′).

Найдем максимумы и минимумы функции ρ. Дифференцируя равенство (7.71), мы имеем

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma \sin\tau - \sum_{k=2}^{\infty} \sigma^k \sum_{i=0}^{k} iA_k^{(i)} \sin i\tau.$$

Эта производная заведомо обращается в нуль при следующих значениях τ:

$$0,\quad 2\pi,\quad 4\pi,\ \ldots,$$
$$\pi,\quad 3\pi,\quad 5\pi,\ \ldots$$

Чтобы определить, какие из этих значений дают максимумы и какие минимумы, найдем вторую производную. Мы имеем

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sigma\cos\tau - \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k} i^2 A_k^{(i)}\cos i\tau,$$

откуда находим при $\tau = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sigma - \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k} i^2 A_k^{(i)}$$

и при $\tau = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi,\ \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = +\sigma - \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i i^2 A_k^{(i)}.$$

Так как при малых значениях σ знак ряда определяется знаком первого его члена, то при $\sigma > 0$ функция ρ имеет максимумы для $\tau = 0,\ 2\pi,\ \ldots$ и минимумы для $\tau = \pi,\ 3\pi,\ \ldots$ Если $\sigma < 0$, то картина будет обратная.

Обозначая через ρ_1 минимум и через ρ_2 максимум величины ρ, мы имеем, следовательно,

при $\sigma = x_0 = \rho_0 - a > 0$

$$\rho_1 = a - \sigma + \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i A_k^{(i)},$$

$$\rho_2 = a + \sigma = \rho_0,$$

а при $\sigma < 0$

$$\rho_1 = a + \sigma = \rho_0,$$

$$\rho_2 = a - \sigma + \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i A_k^{(i)}.$$

Но $\rho_0 = a + \sigma$ есть начальное значение величины ρ. Таким образом, если $\sigma > 0$, то ρ не может сделаться больше своего начального значения, а если $\sigma < 0$, то ρ не может сделаться меньше своего начального значения.

Так как ρ_1 и ρ_2 — величины постоянные (т. е. не зависящие от числа сделанных оборотов), то в случае $\lambda = m$ траектория движущейся точки P есть, вообще говоря, незамкнутая плоская кривая, бесконечно вьющаяся между двумя концентрическими окружностями с радиусами ρ_1 и ρ_2, касающаяся попеременно то одной то другой окружности и заполняющая кольцевую зону, заключенную между ними, всюду плотно. Точки соприкосновения траектории с внутренней окружностью можно назвать *пери-*

центрами орбиты, а точки соприкосновения с внешней окружностью — *апоцентрами.*

Направления на перицентры и апоцентры определяются значениями угла v, соответствующими значениям величины τ, кратным 2π и π. Поэтому разность значений v, соответствующих двум последовательным перицентрам (апоцентрам), дает смещение перицентра орбиты (апоцентра) за один оборот, т. е. за время T.

Согласно формуле (7.70) это смещение численно равно величине

$$|2\pi - \Delta v| = 2\pi \left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} b_0^{(s)} \sigma^s \right|$$

и есть малая величина порядка, не меньшего чем σ.

3. Рассмотрим теперь случай $\lambda = n$, т. е. случай пространственного периодического решения, в котором координаты ρ и z определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \rho &= a + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2k}^{(2s)} \cos 2s\tau, \\ z &= \sigma \cos \tau + \sum_{k=l}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} A_{2k+1}^{(2s+1)} \cos (2s+1)\tau, \end{aligned}\right\} \tag{7.72}$$

а долгота v — опять формулой (7.68).

Траектория движущейся точки P в этом случае есть пространственная кривая, лежащая, очевидно, на некоторой поверхности вращения вокруг оси Oz, уравнение которой получим, исключая τ из двух уравнений (7.72), которые представляют уравнения меридианного сечения этой поверхности. Так как вид поверхности вращения вполне определяется этим сечением, то нам остается только исследовать кривую, лежащую в плоскости, проходящей через ось Oz и параметрические уравнения которой суть уравнения (7.72).

Для этого найдем прежде всего максимумы и минимумы функций ρ и z. Дифференцируя уравнения (7.72) по переменной τ, мы имеем

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{\infty} 2sA_{2k}^{(2k)} \sin 2s\tau \tag{7.73}$$

и

$$\frac{dz}{d\tau} = -\sigma \sin \tau - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} (2s+1) A_{2k+1}^{(2s+1)} \sin (2s+1)\tau. \tag{7.73'}$$

Повторное дифференцирование дает

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} 4s^2 A_{2k}^{(2s)} \cos 2s\tau \tag{7.74}$$

и

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\sigma\cos\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} (2s+1)^2 A_{2k+1}^{(2s+1)} \cos(2s+1)\tau. \tag{7.74$'$}$$

Ясно, что производная $\frac{d\rho}{d\tau}$ обращается в нуль при следующих значениях τ:

$$\left.\begin{matrix} 0, & \pi, & 2\pi, \ldots, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{3\pi}{2}, & \frac{5\pi}{2}, \ldots, \end{matrix}\right\} \tag{7.75}$$

а производная $\frac{dz}{d\tau}$ равна нулю при

$$\left.\begin{matrix} 0, & 2\pi, & 4\pi, \ldots, \\ \pi, & 3\pi, & 5\pi, \ldots \end{matrix}\right\} \tag{7.75$'$}$$

Из (7.74′) усматриваем, что если $\sigma = z_0 > 0$, то значения $\tau = 0,\ 2\pi, \ldots$ дают максимумы, а значения $\tau = \pi,\ 3\pi, \ldots$ — минимумы функции z. Заключение будет обратным, если $\sigma < 0$.

В силу симметрии достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma > 0$. Так как, в силу условий (7.53),

$$\sum_{s=0}^{k} A_{2k+1}^{(2s+1)} = 0$$

для всякого k, то из (7.72) получим

$$z_{\max} = \sigma = z_0, \quad z_{\min} = -\sigma = -z_0.$$

Отсюда следует, что поверхность вращения заключена в области, ограниченной двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения и отстоящими от начала координат на расстоянии, равном $\sigma = z_0$. Так как траектория точки P лежит на упомянутой поверхности, то она не может выйти за пределы указанной области.

Далее формула (7.74) дает при $\tau = 0,\ \pi, \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} 4s^2 A_{2k}^{(2s)} = -4\sigma^2 A_2^{(2)} + \ldots$$

и при $\tau = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s 4s^2 A_{2k}^{(2s)} = +4\sigma^2 A_2^{(2)} + \ldots$$

При малых значениях σ эти выражения имеют противоположные знаки, зависящие от знака постоянной $A_2^{(2)}$.

Поэтому, если $A_2^{(2)} < 0$, то при $\tau = 0, \pi, \ldots$ мы имеем минимумы функции ρ, а при $\tau = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ имеем максимумы. При $A_2^{(2)} > 0$ картина будет обратная.

Заметим, что при $A_2^{(2)} < 0$ минимумы ρ имеют место одновременно с минимумами и максимумами функции z и что при значениях τ, дающих максимумы ρ, функция z обращается в нуль. Наоборот, если $A_2^{(2)} > 0$, то максимумы ρ имеют место одновременно с максимумами и минимумами z, а при значениях τ, дающих минимумы ρ, имеем $z = 0$.

Из приведенного анализа делается ясной форма дуги меридианного сечения поверхности.

Эта дуга симметрична относительно прямой, перпендикулярной оси вращения, вогнута к началу координат, если мы имеем $A_2^{(2)} < 0$, и выпукла к началу, если $A_2^{(2)} > 0$. Так как постоянная b_0 есть вообще число иррациональное, то траектория точки P вьется бесконечно вокруг оси симметрии, заполняя всюду плотно пояс поверхности, образованный вращением этой дуги.

При этом траектория касается по очереди то нижней, то верхней границы пояса, каковыми являются две окружности, получающиеся при пересечении поверхности вращения с плоскостями $z = \pm z_0$.

В том исключительном случае, когда b_0 оказывается числом рациональным, траектория точки P, аналогично плоскому случаю, есть замкнутая кривая, лежащая на упомянутой поверхности вращения, замыкающаяся после конечного числа оборотов. Как уже было отмечено, в этом и только в этом случае движение точки P будет чисто периодическим.

Примечание. Существование периодических и почти периодических решений, рассмотренных выше, обусловливается наличием точных круговых решений задачи Фату, орбитально устойчивых в смысле Ляпунова. Так как исходные круговые орбиты лежат в плоскости симметрии силового поля, то близкие к ним траектории или также лежат в этой плоскости, или близки к ней. Так как для применения метода Ляпунова необходимо иметь исходное периодическое решение задачи, а других частных решений мы указать не можем, то не можем также найти какие-либо другие периодические решения таким путем.

Однако отсюда вовсе не следует, что задача Фату не имеет вообще никаких других периодических (или почти периодических) решений, которые могли бы быть найдены при помощи других методов.

Действительно, рассмотрим опять общие уравнения задачи Фату (7.1), где $U(x, y, z)$ — силовая функция, которая в самом общем случае может быть представлена в виде суммы двух разложений типа (7.3) и (7.3').

Выделяя в первом разложении первый член, соответствующий $k = 0$, мы можем представить U в виде

$$U = \frac{fm}{r} + V(x, y, z).$$

Допустим теперь, что вторая часть силовой функции — возмущающая функция $V(x, y, z)$ — численно весьма мала (по крайней мере в некоторой области пространства) по сравнению с первой, основной частью. Тогда уравнения движения, которым можно придать вид

$$\ddot{x} + \frac{fmx}{r^3} = \frac{\partial V}{\partial x},$$
$$\ddot{y} + \frac{fmy}{r^3} = \frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\ddot{z} + \frac{fmz}{r^3} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

будут иметь решения, мало отличающиеся (по крайней мере в течение некоторого промежутка времени) от решений уравнений невозмущенного кеплеровского движения, которые получим, полагая $V = 0$.

Но уравнения невозмущенного кеплеровского движения заведомо имеют периодические решения, орбиты которых (эллипсы или окружности) могут лежать в плоскостях, образующих любой угол с основной координатной плоскостью.

Поэтому можно искать периодические решения уравнений возмущенного движения, близкие к этим периодическим кеплеровым орбитам.

Такие периодические решения можно искать при помощи метода Пуанкаре, если, например, функция V содержит множителем некоторый малый параметр.

Если же функция V не содержит малого параметра, то его можно всегда ввести искусственным способом, после чего опять возможно применить метод Пуанкаре.

Мы ограничимся здесь только этим кратким замечанием, так как объем книги не позволяет нам рассматривать эту интересную и важную задачу сколько-нибудь подробно.

Часть третья

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Третья часть этой книги посвящена рассмотрению неограниченных задач небесной механики. Термин «неограниченная» имеет, конечно, условное значение, так как, по существу, всякая задача естествознания является в той или иной мере ограниченной. Здесь мы имеем в виду, во-первых, что все рассматриваемые материальные точки являются активно действующими, в противоположность положениям предыдущей главы, где одна из точек являлась пассивно действующей, т. е. не оказывала на другие материальные точки, или тела никакого влияния.

Во-вторых, мы рассмотрим здесь в кратких чертах некоторые важнейшие результаты из теории движения тел, имеющих конечные размеры и массы и обладающие, таким образом, не только поступательными движениями, но также и вращающимися вокруг своих центров масс. Эта задача имеет в настоящее время актуальное значение и успешно разрабатывается многими учеными и в нашей стране и за рубежом.

Глава VIII

ОБЩАЯ ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ

Мы начинаем первую главу третьей части рассмотрением общей задачи многих тел, под которой здесь понимается задача некоторого (конечного) числа материальных точек, которые все являются активно действующими, т. е. предполагается, что каждая из материальных точек системы имеет конечную массу и действует на каждую другую точку этой же системы с силой (притяжения или отталкивания), направленной по прямой, соединяющей обе точки, и пропорциональной некоторой заданной функции времени, расстояния между двумя точками и двух первых производных по времени от этого расстояния.

Иными словами, мы будем рассматривать те же общие законы сил, как и во второй части этой книги. Классическая задача получается отсюда как частный случай, когда силы предполагаются только силами взаимных притяжений по закону Ньютона, с общим для всех точек системы множителем пропорциональности (универсальная константа «всемирного тяготения»). Частным случаем является также задача, в которой действующие силы зависят только от соответствующих расстояний, но по закону, отличному от ньютоновского. В частности, сюда относится релятивистская задача в первом приближении, когда к ньютоновской силе прибавляется сила, обратно пропорциональная четвертой степени взаимного расстояния.

Другим частным случаем является задача с законом Вебера, который мы уже рассматривали в предыдущей части для случая ограниченных задач.

§ 1. Уравнения задачи. Первые интегралы

1. Рассмотрим систему $n+1$ материальных точек $M_0, M_1, \ldots$ $\ldots, M_n$, обладающих постоянными конечными массами m_0, $m_1, \ldots, m_n$ соответственно.

Пусть Δ_{ij} обозначает расстояние между точками M_i и M_j $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i)$.

Все массы m_i являются активно действующими. Пусть на каждую точку M_i действует сила, исходящая от всякой другой точки M_j, направленная по прямой, проходящей через эти две точки, и пропорциональная произведению их масс и некоторой, заданной заранее, функции F_{ij} $(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij})$ от времени t, взаимного расстояния Δ_{ij} и его двух первых производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$ по времени.

Множитель пропорциональности (или, вернее, множители пропорциональности), обеспечивающий размерность, который либо есть величина постоянная, зависящая от закона силы, либо вообще заданная функция времени, мы включаем в функцию F_{ij}.

Кроме того, мы не будем предполагать, что здесь выполняется третья аксиома механики Ньютона, т. е. допустим, что

$$F_{ji} \neq F_{ij}, \tag{8.1}$$

т. е., что действие может быть и не равно противодействию.

Этот закон, важный для земной механики и служащий для определения реакций твердых (неизменяемых) механических систем, в небесной механике не играет существенной роли и может быть принят или не принят, в зависимости от характера рассматриваемой задачи. Заметим, что и в классической небесной механике этот закон не играет существенной роли и в курсах и книгах по небесной механике можно найти (с очень давних времен!) множество задач, в которых о третьей аксиоме Ньютона вообще даже не упоминается. Таковы все ограниченные задачи: классическая задача о движении Луны или какого-либо другого спутника, например, спутников Юпитера, задача о движении астероида или кометы, задача двух неподвижных центров, играющая видную роль в современной астродинамике, задача о полете космического корабля, небесной лаборатории или космической метеостанции и т. д.

Первый и второй законы ньютоновской механики (первая и вторая аксиома в «Математических началах натуральной философии» Ньютона) в нашей книге сохраняются.

Заметим, что первая аксиома устанавливает свойства пространства и времени (движение рассматривается в евклидовом пространстве с равномерно текущим временем), а вторая позволяет наиболее просто написать дифференциальные уравнения движения интересующей нас механической системы.

Необходимо подчеркнуть, что упомянутые три закона динамики самим Ньютоном в его знаменитом сочинении называются так: *Аксиомы, или законы движения* и вполне аналогичны *аксиомам Евклида*, устанавливающим геометрические свойства пространства.

В настоящее время и те и другие аксиомы рассматриваются, как всем хорошо известно, как приближенные, модельные, соотношения, не претендующие вовсе на их абсолютную адекватность истинным свойствам пространства и истинным законам природы, но позволяющим рассчитывать движения небесных тел и познавать некоторые их свойства.

Приближенное соответствие модельных законов истинным (но нам еще не известным!) устанавливается при помощи наблюдений и сравнений этих наблюдений (тоже приближенных и несовершенных) с результатами, вытекающими из математических следствий из принятых модельных законов.

Возьмем теперь некоторую абсолютную систему координат $(O\xi\eta\zeta)$ с началом в фиксированной точке евклидова пространства O и с неизменными направлениями осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Обозначим координаты точки M_i в этой системе буквами ξ_i, η_i, ζ_i.

Тогда на основании второго закона механики Ньютона мы можем написать дифференциальные уравнения движения нашей системы $n+1$ точек в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
m_i\ddot{\xi}_i &= \Xi_i = \sum_{i\neq j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\frac{\xi_j-\xi_i}{\Delta_{ij}},\\
m_i\ddot{\eta}_i &= \mathrm{H}_i = \sum_{i\neq j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\frac{\eta_j-\eta_i}{\Delta_{ij}},\\
m_i\ddot{\zeta}_i &= \mathrm{Z}_i = \sum_{i\neq j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\Delta_{ij}},
\end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

где

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2, \tag{8.3}$$

а их первые и вторые производные по времени получаются дифференцированием формул (8.3), так же, как это уже делалось в предыдущей главе.

Мы будем всегда предполагать, что функции

$$F_{ij} = F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}) \tag{8.4}$$

и их производные первого и второго порядков относительно указанных аргументов, а значит, и относительно координат точек M_i, M_j и их производных первого и второго порядков таковы, что каждой начальной конфигурации и состоянию системы $n+1$ точек соответствует единственное решение системы дифференциальных уравнений (8.2), определенное в бесконечном интервале времени и соответствующее единственному движению этой системы точек, находящейся под действием заданных сил.

При этом нужно, конечно, исключить такие начальные состояния, когда в начальный момент какая-либо из точек M_i

совпадает с другой точкой M_j или имеет неопределенную или бесконечную начальную скорость.

Такие случаи, так же как и в классических задачах небесной механики, являются **особенными** и требуют специального рассмотрения.

Решения не особенных задач, т. е. интегрирование системы дифференциальных уравнений (8.2) при заданных, не особенных, начальных условиях, так же как и в классических задачах, могут быть получены только приближенными методами, например, методами численного интегрирования или при помощи бесконечных рядов того или иного вида.

Однако мы можем указать по крайней мере один частный случай, когда уравнения (8.2) могут быть полностью проинтегрированы в классическом, математическом смысле. Это случай, когда все функции (8.4) определяются формулами

$$F_{ij} = f_{ij}\Delta_{ij}, \quad f_{ij} = \text{const}, \tag{8.4'}$$

т. е. законами действующих сил являются **законы Гука**.

Действительно, в этом случае система (8.2) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \sum_{i \neq j=0}^{n} f_{ij} m_i m_j (\xi_j - \xi_i), \\ m_i\ddot{\eta}_i &= \sum_{i \neq j=0}^{n} f_{ij} m_i m_j (\eta_j - \eta_i), \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= \sum_{i \neq j=0}^{n} f_{ij} m_i m_j (\zeta_j - \zeta_i). \end{aligned}\right\} \tag{8.2'}$$

Очевидно, что система (8.2′) состоит из трех независимых систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с $n+1$ неизвестными функциями каждая. Все три системы имеют одинаковую структуру и каждая может быть легко проинтегрирована в элементарных функциях.

Отметим, что уравнения (8.2′) оказываются также интегрируемыми и в том случае, когда величины f_{ij} в законах (8.4′) не остаются постоянными, а являются функциями времени, определяемыми законом И. В. Мещерского (см. главу IV). При этом предполагается еще, что во все время движения точки M_i остаются на неизменной прямой линии.

Подробности, относящиеся к этому случаю, можно найти в книге И. В. **Мещерского** «Работы по механике тел переменной массы», Гостехиздат, 1949.

2. Посмотрим теперь, в каких случаях (кроме только что отмеченного случая задачи с законом Гука) система (8.2) может допускать первые интегралы, подобные тем, которые имеет классическая задача многих тел с законом Ньютона.

Для этого применим к уравнениям (8.2) хорошо известную процедуру. Из уравнений (8.2) выводим прежде всего следующие комбинации:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\xi}_i &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}} (F_{ij} - F_{ji}),\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\eta}_i &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}} (F_{ij} - F_{ji}),\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\zeta}_i &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}} (F_{ij} - F_{ji}),
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

левые части которых являются точными производными. Следовательно, для существования интегралов, аналогичных классическим, необходимо, чтобы правые части также были точными производными. Но, очевидно, для этого достаточно, чтобы для каждой пары индексов «i» и «j» ($i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$; $j \neq i$) выполнялись условия

$$F_{ji} = F_{ij}, \tag{8.6}$$

т. е. когда действующие в нашей системе материальных точек силы удовлетворяли бы третьему закону ньютоновской механики (т. е. когда действие равно противодействию).

Если равенства (8.6) действительно выполняются, то правые части уравнений (8.5) оказываются равными нулю и каждое из трех уравнений может быть дважды проинтегрировано.

Выполняя это интегрирование, мы получим

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i &= a_1, & \sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i &= a_1 t + b_1,\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i &= a_2, & \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i &= a_2 t + b_2,\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i &= a_3, & \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i &= a_3 t + b_3.
\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Уравнения (8.7), где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — произвольные постоянные, являются первыми интегралами уравнений (8.2), *каковы бы ни были действующие силы*, лишь бы выполнялись условия (8.6). В частности, условия (8.6) всегда выполняются, когда в системе материальных точек царствует закон типа (8.4), но единый для всех пар точек системы.

Уравнения (8.7) выражают принцип сохранения движения центра масс и называются поэтому, как и в классическом случае, интегралами движения центра масс. Действительно, обозначим буквами $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ координаты центра масс системы $n+1$ материальных точек, т. е. положим

$$\bar{\xi}=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i, \quad \bar{\eta}=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i, \quad \bar{\zeta}=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i, \tag{8.7'}$$

где

$$m=\sum_{i=0}^{n} m_i \tag{8.7''}$$

есть полная масса всей системы точек.

С помощью (8.7′) интегралы (8.7) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\xi}=\frac{a_1t+b_1}{m}, && \bar{\eta}=\frac{a_2t+b_2}{m}, && \bar{\zeta}=\frac{a_3t+b_3}{m},\\ &\frac{d\bar{\xi}}{dt}=\frac{a_1}{m}, && \frac{d\bar{\eta}}{dt}=\frac{a_2}{m}, && \frac{d\bar{\zeta}}{dt}=\frac{a_3}{m}, \end{aligned}\right\} \tag{8.7'''}$$

откуда следует, что центр масс системы $G(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ движется в абсолютной системе координат прямолинейно и равномерно.

Если условия (8.6) не выполняются, или выполняются только частично (т. е. не для всех, но только для некоторых пар точек), то правые части равенств (8.5) не будут равны нулю и интегралы движения центра масс не существуют. Поэтому условия (8.6) являются не только достаточными, но и необходимыми для выполнения принципа движения центра масс.

Заметим теперь, что существование интегралов (8.7) нисколько не облегчает задачу об интегрировании системы (8.2), а отсутствие этих интегралов вовсе не затрудняет выполнение этой задачи.

Центр масс, координаты которого определяются формулами (8.7′), всегда существует; только при выполнении условий (8.6) точка G движется равномерно по прямой линии, а при невыполнении условий (8.6) точка G движется неравномерно по некоторой пространственной траектории.

Обозначим теперь через c_1, c_2, c_3 проекции вектора момента количества движения системы $n+1$ материальных точек, т. е. положим, как и в классической небесной механике,

$$\left.\begin{aligned} c_1&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_i\dot{\eta}_i),\\ c_2&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i-\xi_i\dot{\zeta}_i),\\ c_3&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i\dot{\eta}_i-\eta_i\dot{\xi}_i). \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Тогда, комбинируя надлежащим образом (так же, как и в классической небесной механике) уравнения (8.2), мы выведем из них три следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dc_1}{dt} &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\eta_i\zeta_j - \zeta_i\eta_j}{\Delta_{ij}}(F_{ij} - F_{ji}),\\
\frac{dc_2}{dt} &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\zeta_i\xi_j - \xi_i\zeta_j}{\Delta_{ij}}(F_{ij} - F_{ji}),\\
\frac{dc_3}{dt} &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\xi_i\eta_j - \eta_i\xi_j}{\Delta_{ij}}(F_{ij} - F_{ji}).
\end{aligned}\right\} \qquad (8.8')$$

Правые части этих уравнений обращаются в нули, если выполняются условия (8.6), и тогда интегрирование равенств (8.8′) дает три следующих интеграла, вполне тождественных с классическими интегралами площадей:

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i) = c_1^0 = \text{const},\\
c_2 &= \sum_{i=0}^{n} m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\zeta}_i) = c_2^0 = \text{const},\\
c_3 &= \sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i) = c_3^0 = \text{const}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.9)$$

Равенства (8.9) выражают принцип сохранения момента количества движения и называются так же, как и в классической небесной механике, *интегралами площадей* или *интегралами моментов*.

Для существования этих интегралов условия (8.6) являются, так же как и для интегралов центра масс, необходимыми и достаточными. Если интегралы (8.9) существуют, то существует также плоскость Лапласа, определяемая в неизменной системе координат $(O\xi\eta\zeta)$ уравнением

$$c_1(\xi - \bar{\xi}) + c_2(\eta - \bar{\eta}) + c_3(\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \qquad (8.9')$$

Эта плоскость, проходящая через начало координат перпендикулярно к вектору момента количества движения системы, сохраняет всегда неизменную ориентацию в абсолютной системе осей, так же как и всякая другая плоскость, параллельная плоскости (8.9).

Если условия (8.6) не выполняются, то величины c_1, c_2, c_3 не будут оставаться постоянными во все время движения и плоскость (8.9′) не будет неизменной плоскостью.

3. Остается рассмотреть вопрос о существовании десятого интеграла системы (8.2), а именно *интеграла живой силы*.

Обозначим, как обычно, кинетическую энергию нашей системы, материальных точек M_i в абсолютных осях через T, т. е. положим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot\xi_i^2+\dot\eta_i^2+\dot\zeta_i^2\right). \tag{8.10}$$

Дифференцируя это выражение по t и заменяя вторые производные их значениями из (8.2), мы получим следующее равенство:

$$\frac{dT}{dt}=W, \tag{8.11}$$

где W определяется формулой

$$W=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_i m_j F_{ij} v_{ij} \qquad (j\neq i), \tag{8.12}$$

и

$$v_{ij}=\frac{\xi_j-\xi_i}{\Delta_{ij}}\dot\xi_i+\frac{\eta_j-\eta_i}{\Delta_{ij}}\dot\eta_i+\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\Delta_{ij}}\dot\zeta_i \tag{8.12'}$$

есть, очевидно, проекция скорости v_i точки M_i на направление $\overline{M_iM_j}$.

Из (8.11) следует, что для существования первого интеграла необходимо, чтобы величина W, определяемая (8.12), была точной производной по времени.

Но при произвольно заданных законах сил, т. е. функций F_{ij}, величина W не будет, вообще говоря, точной производной, так что в самом общем случае уравнения (8.2) не будут допускать интеграла, аналогичного интегралу энергии классической задачи, и мы можем только написать интегральное соотношение

$$T=\int W\,dt+h, \tag{8.13}$$

которое можно назвать *квази-интегралом* энергии («как бы интегралом» или «почти интегралом»).

Допустим теперь, что условия (8.6) выполняются для всякой пары индексов «i» и «j» ($i, j=0, 1, 2, \ldots, n$; $j\neq i$), т. е. допустим, что выполняется третья аксиома механики Ньютона. Тогда выражение (8.12) для W примет вид

$$W=\sum_{i<j} m_i m_j (v_{ij}+v_{ji}) F_{ij}. \tag{8.14}$$

Но ввиду (8.12′) мы имеем

$$v_{ij}+v_{ji}=-\frac{1}{\Delta_{ij}}\left[(\xi_j-\xi_i)(\dot\xi_j-\dot\xi_i)+(\eta_j-\eta_i)(\dot\eta_j-\dot\eta_i)+\right.$$
$$\left.+(\zeta_j-\zeta_i)(\dot\zeta_j-\dot\zeta_i)\right].$$

Теперь дифференцирование формулы (8.3) дает

$$\Delta_{ij}\dot{\Delta}_{ij} = (\xi_j - \xi_i)(\dot{\xi}_j - \dot{\xi}_i) + (\eta_j - \eta_i)(\dot{\eta}_j - \dot{\eta}_i) + (\zeta_j - \zeta_i)(\dot{\zeta}_j - \dot{\zeta}_i).$$

Следовательно, предыдущая формула принимает простой вид

$$v_{ij} + v_{ji} = -\dot{\Delta}_{ij},$$

и формула (8.14) напишется следующим образом:

$$W = -\sum_{i<j} m_i m_j F_{ij}\dot{\Delta}_{ij}. \tag{8.15}$$

Отсюда видно, что если законы сил таковы, что для каждой функции F_{ij} существует функция Φ_{ij}, так что

$$\dot{\Delta}_{ij}F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}) = \frac{d}{dt}\Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij}), \tag{8.16}$$

то W, определяемая формулой (8.15), становится точной производной от функции U, определяемой формулой

$$U = -\sum_{i<j} m_i m_j \Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij}). \tag{8.17}$$

В этом случае равенство (8.11) может быть точно проинтегрировано и мы получаем первый интеграл — интеграл энергии, или интеграл живой силы, в известном классическом виде

$$T = U + h, \tag{8.18}$$

или, более подробно, в форме

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = -\sum_{i<j} m_i m_j \Phi_{ij} + h. \tag{8.18$'$}$$

Но условия типа (8.16) уже рассматривались в предыдущей части книги, где были также даны условия, которым должны удовлетворять функции F_{ij}, чтобы выполнялись (8.16). Поэтому повторять вывод этих условий нет надобности.

Мы видим, что для существования интеграла живой силы условия (8.6) оказываются необходимыми, но недостаточными, и должны еще выполняться условия, обеспечивающие возможность равенств (8.16).

Заметим, что если законы сил F_{ij} зависят только от соответствующих расстояний Δ_{ij} (но функционально могут быть различными!), то функция Φ_{ij}, определяемая формулой (8.17), всегда существует и мы имеем

$$U = -\sum_{i<j} m_i m_j \int F_{ij}(\Delta_{ij})\,d\Delta_{ij}. \tag{8.17$'$}$$

В этом случае U есть *функция сил* (или силовая функция) и уравнения (8.2) в этом случае могут быть записаны в классическом виде

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \qquad (8.2')$$

Но если F_{ij} (или хотя бы одна из них) зависит от времени или от производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$, или хотя бы от какой-нибудь одной из этих величин, то уравнения (8.2) уже не могут быть написаны в виде (8.2′) и функция U, определяемая (8.17), не обладает свойствами силовой функции и ее можно только назвать *«квази-силовой функцией»*.

Таков, например, случай, когда действующие силы подчиняются закону Вебера (см. главу II) и когда интеграл (8.18′) имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = \sum_{i<j} \frac{f_{ij} m_i m_j}{\Delta_{ij}}\left(1 - \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2}\right) + h.$$

4. Мы закончим этот параграф выводом соотношения, аналогичного уравнению Лагранжа — Якоби в классической задаче многих тел (материальных точек), взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Применяя для этого к уравнениям (8.2) ту же процедуру, как и в классической механике, мы получим прежде всего следующее соотношение:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i + \eta_i\ddot{\eta}_i + \zeta_i\ddot{\zeta}_i) = V, \qquad (8.19)$$

где

$$V = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\rho_{ij} \qquad (j \neq i) \qquad (8.19')$$

и

$$\rho_{ij} = \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}}\xi_i + \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}}\eta_i + \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}}\zeta_i \qquad (8.19'')$$

есть, очевидно, проекция радиуса-вектора r_i точки M_i на направление $\overline{M_i M_j}$.

Но уравнение (8.19) может быть переписано, как нетрудно убедиться, в следующей форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = V.$$

Полагая

$$J = \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2, \quad r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2, \qquad (8.20)$$

и имея в виду формулу (8.10), мы можем написать (8.19) в виде

$$\ddot{J} = 4T + 2V, \tag{8.21}$$

что можно рассматривать как первую форму уравнения Лагранжа — Якоби.

Исключая из (8.21) живую силу T посредством квази-интеграла (8.13), который напишем в виде

$$T = U^* + h, \quad U^* = \int W\,dt,$$

мы получим из (8.21) следующее уравнение:

$$\ddot{J} = 4U^* + 2V + 4h. \tag{8.21$'$}$$

Введем теперь вместо момента инерции J системы точек M_i относительно начала координат момент инерции R относительно центра масс G этих точек.

Имея в виду известное соотношение между двумя моментами инерции

$$J = R + m\bar{r}^2,$$

где

$$R = \frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad \bar{r}^2 = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2, \tag{8.22}$$

мы перепишем (8.21) и (8.21′) следующим образом:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4T + 2V - 4h_c \tag{8.23}$$

и

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4U^* + 2V + 4(h - h_c), \tag{8.23$'$}$$

где

$$h_c = \frac{m}{4}\,\frac{d^2\bar{r}^2}{dt^2}. \tag{8.24}$$

Уравнения (8.23) и (8.23′) представляют вторую форму уравнения Лагранжа — Якоби.

Допустим теперь, что законы сил удовлетворяют соотношениям (8.6). Тогда существуют интегралы движения центра масс и из (8.24) имеем

$$h_c = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2m} = \text{const}. \tag{8.24$'$}$$

Далее, при этом же предположении имеем из (8.19)

$$V = \sum_{i<j} m_i m_j (\rho_{ij} + \rho_{ji}) F_{ij}.$$

Но

$$\Delta_{ij}\cdot(\rho_{ij} + \rho_{ji}) = -(\xi_j - \xi_i)^2 - (\eta_j - \eta_i)^2 - (\zeta_j - \zeta_i)^2 = -\Delta_{ij}^2$$

и мы получим

$$V = -\sum_{i<j} m_i m_j \Delta_{ij} F_{ij}. \tag{8.25}$$

Допустим, далее, что существует функция U, определяемая формулой (8.17), так что $U^* = U$ и существует интеграл живой силы (8.18). Тогда уравнения (8.21) и (8.23) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2J}{dt^2} = 4U + 2V + 4h, \tag{8.26}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4U + 2V + 4h', \tag{8.27}$$

где h — постоянная живой силы относительно начала координат и h' — относительно центра масс всей системы точек.

Если положить для сокращения

$$\tilde{U} = 2U + V = -\sum_{i<j} m_i m_j \tilde{U}_{ij},$$

$$\tilde{U}_{ij} = 2\Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij};\ \dot{\Delta}_{ij}) + \Delta_{ij} F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}),$$

то уравнения (8.26) и (8.27) примут вид

$$\frac{d^2J}{dt^2} = 2\tilde{U} + 4h, \tag{8.26$'$}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2\breve{U} + 4h'. \tag{8.27$'$}$$

Функции $\tilde{U}_{ij}$ являются известными функциями своих аргументов. Например, для случая, когда каждая F_{ij} определяется законом Вебера, мы имеем

$$\tilde{U}_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}}\left(1 + \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} - \frac{2\Delta_{ij}\ddot{\Delta}_{ij}}{\sigma_{ij}^2}\right),$$

и для случая закона Ньютона соответственно ($\sigma_{ij} = \infty$)

$$\tilde{U}_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}}.$$

§ 2. Общая задача трех тел

1. Пусть в задаче, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, $n = 2$, так что система состоит из трех материальных точек, M_0, M_1, M_2 с постоянными массами m_0, m_1, m_2 соответственно. Предполагается, что эти три точки взаимодействуют

попарно с силами такого же характера, как и (8.4). Уравнения движения трех точек получаются из уравнений (8.2) при $n=2$ и, так же как и в классической задаче трех тел (материальных точек), образуют систему девяти уравнений второго порядка относительно девяти абсолютных координат, так что общий порядок всей системы равен 18.

Так как правые части системы (8.2) при любом n содержат только разности абсолютных координат, то, независимо от существования или несуществования первых интегралов, т. е. при любых заданных функциях F_{ij} (здесь i, $j=0, 1, 2$; $j \neq i$), систему (8.2) можно преобразовать к относительным координатам. В этом параграфе мы возьмем за начало координат точку M_0, оставляя новые оси соответственно параллельными первоначальным абсолютным осям и одинаково с ними направленными.

Координаты точек M_1 и M_2 в новой системе осей обозначим соответственно через

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \xi_0, & y_1 &= \eta_1 - \eta_0, & z_1 &= \zeta_1 - \zeta_0, \\ x_2 &= \xi_2 - \xi_0, & y_2 &= \eta_2 - \eta_0, & z_2 &= \zeta_2 - \zeta_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

Тогда три взаимных расстояния, т. е. три стороны треугольника $(M_0M_1M_2)$ определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{01} &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = r_1, \\ \Delta_{02} &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = r_2, \\ \Delta_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \Delta, \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

а для производных от расстояний (8.29) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} r_1\dot r_1 &= x_1\dot x_1 + y_1\dot y_1 + z_1\dot z_1, \\ r_1\ddot r_1 &= x_1\ddot x_1 + y_1\ddot y_1 + z_1\ddot z_1 + \dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot z_1^2 - \dot r_1^2, \\ r_2\dot r_2 &= x_2\dot x_2 + y_2\dot y_2 + z_2\dot z_2, \\ r_2\ddot r_2 &= x_2\ddot x_2 + y_2\ddot y_2 + z_2\ddot z_2 + \dot x_2^2 + \dot y_2^2 + \dot z_2^2 - \dot r_2^2, \\ \Delta\dot\Delta &= (x_2 - x_1)(\dot x_2 - \dot x_1) + (y_2 - y_1)(\dot y_2 - \dot y_1) + \\ &\qquad + (z_2 - z_1)(\dot z_2 - \dot z_1), \\ \Delta\ddot\Delta &= (x_2 - x_1)(\ddot x_2 - \ddot x_1) + (y_2 - y_1)(\ddot y_2 - \ddot y_1) + \\ &+ (z_2 - z_1)(\ddot z_2 - \ddot z_1) + (\dot x_2 - \dot x_1)^2 + (\dot y_2 - \dot y_1)^2 + (\dot z_2 - \dot z_1)^2 - \dot\Delta^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.29'}$$

Далее, заметим, что

$$\left.\begin{aligned}
&F_{01}=F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1),\\
&F_{10}=F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)\overset{=}{\neq} F_{01},\\
&F_{02}=F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2),\\
&F_{20}=F_{20}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)\overset{=}{\neq} F_{02},\\
&F_{12}=F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta}),\\
&F_{21}=F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\overset{=}{\neq} F_{12}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

В формулах (8.30) двойной знак «$\overset{=}{\neq}$» указывает, что функция F_{ji} может быть одинакова с функцией F_{ij} и может от нее отличаться.

Из (8.28) и (8.2) мы выведем без труда уравнения движения точек M_1 и M_2 в системе координат с началом в M_0 и с неизменными направлениями осей. Эти уравнения мы выпишем здесь полностью:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_1&=-(m_0F_{10}+m_1F_{01})\frac{x_1}{r_1}-m_2F_{02}\cdot\frac{x_2}{r_2}+m_2F_{12}\frac{x_2-x_1}{\Delta},\\
\ddot{y}_1&=-(m_0F_{10}+m_1F_{01})\frac{y_1}{r_1}-m_2F_{02}\cdot\frac{y_2}{r_2}+m_2F_{12}\frac{y_2-y_1}{\Delta},\\
\ddot{z}_1&=-(m_0F_{10}+m_1F_{01})\frac{z_1}{r_1}-m_2F_{02}\cdot\frac{z_2}{r_2}+m_2F_{12}\frac{z_2-z_1}{\Delta},
\end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_2&=-(m_0F_{20}+m_1F_{01})\frac{x_2}{r_2}-m_2F_{02}\cdot\frac{x_2}{r_2}-m_1F_{21}\frac{x_2-x_1}{\Delta},\\
\ddot{y}_2&=-(m_0F_{20}+m_1F_{01})\frac{y_2}{r_2}-m_2F_{02}\cdot\frac{y_2}{r_2}-m_1F_{21}\frac{y_2-y_1}{\Delta},\\
\ddot{z}_2&=-(m_0F_{20}+m_1F_{01})\frac{z_2}{r_2}-m_2F_{02}\cdot\frac{z_2}{r_2}-m_1F_{21}\frac{z_2-z_1}{\Delta}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

Уравнения (8.31) и (8.32) образуют совместную систему шести уравнений второго порядка, полностью определяющую относительное движение точек M_1 и M_2 в системе координат с началом в точке M_0.

Однако следует заметить, что знание относительных движений точек M_1 и M_2 вообще не определяет их абсолютных движений. Действительно, если $F_{ji}\neq F_{ij}$, т. е. если не выполняется принцип движения центра масс, то координаты точки M_0 в абсолютной системе остаются неопределенными и для их определения нужно еще проинтегрировать систему трех уравнений с неизвестными ξ_0, η_0, ζ_0, из которых предварительно нужно исключить абсолютные координаты точек M_1, M_2 при помощи равенств (8.28), в которых относительные координаты точек M_1 и M_2 надо считать известными.

Если же принцип сохранения движения центра масс выполняется, т. е. если $F_{ji} = F_{ij}$, то, зная относительные координаты точек M_1 и M_2, мы без всякого интегрирования найдем абсолютные координаты точки M_0 из (8.7) для $n = 2$ в виде

$$m \cdot \xi_0 = a_1 t + b_1 - m_1 x_1 - m_2 x_2,$$
$$m \cdot \eta_0 = a_2 t + b_2 - m_1 y_1 - m_2 y_2,$$
$$m \cdot \zeta_0 = a_3 t + b_3 - m_1 z_1 - m_2 z_2.$$

Найдя по этим формулам или интегрированием упомянутых выше уравнений ξ_0, η_0, ζ_0, мы можем найти затем из (8.28) и абсолютные координаты точек M_1 и M_2.

Из уравнений (8.31) и (8.32) получаются, в частности, и классические уравнения относительного движения точек M_1 и M_2 и уравнения общей ограниченной задачи о движении пассивной точки M_2, находящейся под влиянием точек M_0 и M_1.

2. Теперь выведем из уравнений (8.31) и (8.32) уравнения общей задачи трех тел в той форме, которую придал им А. М. Ляпунов в своих исследованиях по задаче трех тел.

Три точки M_0, M_1, M_2, очевидно, всегда образуют треугольник, а поэтому всегда находятся в одной плоскости, положение которой относительно неизменных осей вообще изменяется с течением времени.

Если в каждый момент времени мы будем знать положение плоскости треугольника (в неизменных осях координат) и положение каждой из его вершин в этой плоскости, то движение каждой из трех материальных точек будет полностью определено.

Положение плоскости треугольника можно определить обычными астрономическими элементами — наклонением I и долготой узла Ω. Ориентация треугольника в его плоскости определится положением одной из его вершин и углом, который образует одна из сторон с линией пересечения плоскости треугольника с основной координатной плоскостью. Положения двух других вершин в плоскости треугольника определятся, если будут известны их расстояния от первой вершины и угол, образуемый этими расстояниями.

Для преобразования уравнений (8.31) и (8.32) к новым переменным, которые только что были описаны, введем подвижную систему координат с началом в точке M_0, основной плоскостью которой является плоскость $(M_0M_1M_2)$. Примем за новую ось абсцисс $(M_0\xi)$ направление, идущее от начала M_0 к точке M_1, за новую ось ординат $(M_0\eta)$ — направление, перпендикулярное к $(M_0\xi)$ в плоскости треугольника, составляющее острый угол с направлением (M_0M_2), и за новую ось аппликат $(M_0\zeta)$ — направление, перпендикулярное к плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$, притом такое, чтобы система $(M_0\xi\eta\zeta)$ могла быть совмещена надлежащим вращением с системой (M_0xyz).

Обозначим через a_{ij} направляющие косинусы, определяющие ориентацию новой системы по отношению к старой по следующей схеме:

	ξ	η	ζ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Эти девять направляющих косинусов выражаются через три эйлеровых угла подвижной системы $(M_0\xi\eta\zeta)$ — долготу узла Ω, наклонность I и угол собственного вращения Φ — известными формулами теоретической механики (или теории кеплеровского движения), которыми в этом параграфе нам не придется пользоваться и которые поэтому здесь выписывать не будем.

Старые координаты x, y, z какой угодно точки пространства выражаются через новые координаты ξ, η, ζ очевидными формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

Но координаты точек M_1 и M_2 в подвижной системе координат будут, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 = r_1, && \eta_1 = 0, && \zeta_1 = 0, \\ &\xi_2 = r_2\cos\psi, && \eta_2 = r_2\sin\psi, && \zeta_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

где ψ обозначает угол, образованный радиусами-векторами r_1 и r_2. Теперь формулы (8.33) дают

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = a_{11}r_1, && x_2 = a_{11}r_2\cos\psi + a_{12}r_2\sin\psi, \\ &y_1 = a_{21}r_1, && y_2 = a_{21}r_2\cos\psi + a_{22}r_2\sin\psi, \\ &z_1 = a_{31}r_1, && z_2 = a_{31}r_2\cos\psi + a_{32}r_2\sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

Формулы (8.35) выражают относительные координаты точек M_1 и M_2 в неизменной системе (M_0xyz) через величины

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \Omega,\ I,\ \Phi, \tag{8.36}$$

которые и могут быть приняты за новые переменные.

Величины r_1, r_2 и ψ полностью определяют треугольник $(M_0M_1M_2)$. Действительно, обозначим два других угла треугольника через φ_1 (при вершине M_1) и φ_2 (при точке M_2). Тогда из треугольника $(M_0M_1M_2)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} &\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\psi}, \\ &\sin\varphi_1 = \frac{r_2}{\Delta}\sin\psi, \quad \sin\varphi_2 = \frac{r_1}{\Delta}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Но вместо углов Эйлера Ω, I, Φ, определяющих положение плоскости треугольника в неподвижных осях (точнее, в осях, имеющих неизменные направления) и положение треугольника в его плоскости, введем, согласно Ляпунову, три новые неизвестные, а именно проекции угловой скорости триэдра $(M_0\xi\eta\zeta)$ (подвижной системы координат) ω_1, ω_2, ω_3 на оси $(M_0\xi)$, $(M_0\eta)$, $(M_0\zeta)$ соответственно.

Эти величины связаны с углами Эйлера известными кинематическими уравнениями Эйлера

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \sin\Phi\sin I\cdot\dot{\Omega} + \cos\Phi\cdot\dot{I}, \\ &\omega_2 = \cos\Phi\sin I\cdot\dot{\Omega} - \sin\Phi\cdot\dot{I}, \\ &\omega_3 = \cos I\cdot\dot{\Omega} + \dot{\Phi}, \end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

которые представляют три дифференциальных уравнения первого порядка, определяющие функции Ω, I, Φ, когда ω_1, ω_2, ω_3 известны как функции времени.

Производные по времени от направляющих косинусов a_{ij} могут быть выражены через ω_1, ω_2, ω_3 и a_{ij} также известными формулами теоретической механики

$$\dot{a}_{ij} = \omega_{(j+2)}a_{j\,(i+1)} - \omega_{(j+1)}a_{i\,(j+2)}, \tag{8.38$'$}$$

причем когда в индексной скобке выходит число, большее трех, то тройка должна быть отброшена.

Величины

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \tag{8.39}$$

примем теперь за новые переменные в нашей задаче.

Введем еще для симметрии уравнений, которые выведем ниже, еще три величины ω_1', ω_2', ω_3' формулами

$$\left.\begin{aligned}\omega_1' &= \omega_1\cos\psi + \omega_2\sin\psi,\\ \omega_2' &= -\omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi,\\ \omega_3' &= \omega_3 + \dot\psi.\end{aligned}\right\}\qquad(8.40)$$

Эти величины являются проекциями угловой скорости триэдра $(M_0\xi\eta\zeta)$ на направление (M_0M_2), направление, перпендикулярное к (M_0M_2) в плоскости треугольника, и на направление перпендикуляра к этой плоскости. При этом, три указанных направления должны совмещаться с осями $M_0\xi$, $M_0\eta$ и $M_0\zeta$ надлежащим вращением.

3. Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие величины (8.39), проще всего поступить следующим образом: помножим сначала уравнения (8.31) соответственно на x_1, y_1, z_1 и сложим. Мы имеем

$$x_1\ddot x_1 + y_1\ddot y_1 + z_1\ddot z_1 = -(m_0F_{10} + m_1F_{01})\cdot r_1 - \\ - m_2F_{02}\cdot r_1\cos\psi + m_2F_{12}\cdot r_1\frac{r_2\cos\psi - r_1}{\Delta}. \qquad(8.41)$$

Но

$$x_1\ddot x_1 + y_1\ddot y_1 + z_1\ddot z_1 = r_1\ddot r_1 + \dot r_1^2 - (\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot z_1^2),$$

а из формул (8.35) найдем

$$\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot z_1^2 = \\ = \dot r_1^2 + 2(a_{11}\dot a_{11} + a_{21}\dot a_{21} + a_{31}\dot a_{31})r_1\dot r_1 + (\dot a_{11}^2 + \dot a_{21}^2 + \dot a_{31}^2)r_1^2.$$

Но сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, а поэтому средний член последнего равенства исчезает. Далее, из (8.38′) найдем, что выражение в скобках в последнем члене равно $\omega_2^2 + \omega_3^2$. Поэтому

$$x_1\ddot x_1 + y_1\ddot y_1 + z_1\ddot z_1 = r_1\ddot r_1 - (\omega_2^2 + \omega_3^2)r_1^2.$$

Теперь из последнего члена равенства (8.41) с помощью равенств (8.37) получим

$$\frac{r_2\cos\psi - r_1}{\Delta} = \frac{\sin\varphi_1\cos\psi - \sin\varphi_2}{\sin\psi},$$

но

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180^\circ,$$

и, следовательно,

$$\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \psi),$$

а поэтому предыдущая дробь оказывается равной $-\cos\varphi_1$.

Теперь уравнение (8.41) приводится к виду

$$\ddot{r}_1 - (\omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot r_1 = -(m_0 F_{10} + m_1 F_{01}) - m_2 F_{02} \cdot \cos\psi - m_2 F_{12} \cdot \cos\varphi_1.$$

Это есть первое из уравнений в переменных Ляпунова.

Помножая затем уравнения (8.31) соответственно на 0, $-z_1$, $+y_1$, потом на $+z_1$, 0, $-x_1$ и, наконец, на $-y_1$, $+x_1$, 0 и складывая каждый раз результаты, мы получим три следующих равенства:

$$\frac{d}{dt}(y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1) = m_2(y_1 z_2 - z_1 y_2)\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$
$$\frac{d}{dt}(z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1) = m_2(z_1 x_2 - x_1 z_2)\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$
$$\frac{d}{dt}(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) = m_2(x_1 y_2 - y_1 x_2)\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right).$$

Но из формул (8.35) и (8.38′) мы имеем

$$y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1 = r_1^2(a_{13}\omega_3 + a_{12}\omega_2), \quad y_1 z_2 - z_1 y_2 = a_{13} r_1 r_2 \sin\psi,$$
$$z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1 = r_1^2(a_{23}\omega_3 + a_{22}\omega_2), \quad z_1 x_2 - x_1 z_2 = a_{23} r_1 r_2 \sin\psi,$$
$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = r_1^2(a_{33}\omega_3 + a_{32}\omega_2), \quad x_1 y_2 - y_1 x_2 = a_{33} r_1 r_2 \sin\psi,$$

вследствие чего предыдущие равенства приведутся к виду

$$a_{13}\frac{d(\omega_3 r_1^2)}{dt} + a_{12}\frac{d(\omega_2 r_1^2)}{dt} + (\dot{a}_{13}\omega_3 + \dot{a}_{12}\omega_2) r_1^2 = m_2 a_{13}\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$
$$a_{23}\frac{d(\omega_3 r_1^2)}{dt} + a_{22}\frac{d(\omega_2 r_1^2)}{dt} + (\dot{a}_{23}\omega_3 + \dot{a}_{22}\omega_2) r_1^2 = m_2 a_{23}\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$
$$a_{33}\frac{d(\omega_3 r_1^2)}{dt} + a_{32}\frac{d(\omega_2 r_1^2)}{dt} + (\dot{a}_{33}\omega_3 + \dot{a}_{32}\omega_2) r_1^2 = m_2 a_{33}\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right).$$

Для исключения направляющих косинусов помножим последние уравнения соответственно на a_{13}, a_{23}, a_{33} и сложим, а затем умножим на a_{12}, a_{22}, a_{32} и сложим. Используя еще формулы (8.37) и свойства направляющих косинусов, мы получим в результате следующие два уравнения в переменных Ляпунова:

$$\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_3)}{dt} + r_1\omega_1\omega_2 + m_2 F_{02} \cdot \sin\psi - m_2 F_{12} \cdot \sin\varphi_1 = 0,$$
$$\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_2)}{dt} - r_1\omega_1\omega_3 = 0.$$

Подобным же образом поступаем и с уравнениями (8.32). Мы получим еще три уравнения такого же вида. В результате мы преобразуем уравнения (8.31) и (8.32) к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{r}_1-(\omega_2^2+\omega_3^2)r_1+m_0F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)+m_1F_{31}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)+\\
&\qquad+m_2F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)\cos\psi+m_2F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\cos\varphi_1=0,\\
&\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_3)}{dt}+r_1\omega_1\omega_2+m_2F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)\sin\psi-\\
&\qquad\qquad-m_2F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\sin\varphi_1=0,\\
&\qquad\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_2)}{dt}-r_1\omega_1\omega_3=0,
\end{aligned}\right\}\tag{8.42}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{r}_2-(\omega_2'^2+\omega_3'^2)r_2+m_0F_{20}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)+m_2F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)+\\
&\qquad+m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)\cos\psi+m_1F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\cos\varphi_2=0,\\
&\frac{1}{r_2}\frac{d(r_2^2\omega_3')}{dt}+r_2\omega_1'\omega_2'-m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)\sin\psi+\\
&\qquad\qquad+m_1F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\sin\varphi_2=0,\\
&\qquad\frac{1}{r_2}\frac{d(r_2^2\omega_2')}{di}-r_2\omega_1'\omega_3'=0.
\end{aligned}\right\}\tag{8.43}$$

4. Если все действующие силы подчиняются одному и тому же закону, т. е. если $F_{ij}=F$, то уравнения движения в этом случае получатся из уравнений (8.42) и (8.43) просто путем отбрасывания нижних индексов у функций F_{ij}. Если при этом силы зависят только от соответствующих расстояний и имеет место третья аксиома Ньютона, то получим уравнения, которые рассматривал Ляпунов и которые напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_1}{dt^2}-(\omega_2^2+\omega_3^2)r_1+(m_0+m_1)F(r_1)+\\
&\qquad+m_2F(r_2)\cos\psi+m_2F(\Delta)\cos\varphi_1=0,\\
&\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_3)}{dt}+r_1\omega_1\omega_2+m_2F(r_2)\cos\psi-m_2F(\Delta)\sin\varphi_1=0,\\
&\qquad\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_2)}{dt}-r_1\omega_1\omega_3=0,
\end{aligned}\right\}\tag{8.42'}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_2}{dt^2} - \left(\omega_2'^2 + \omega_3'^2\right) r_2 + (m_0 + m_2) F(r_2) + \\
&\qquad\qquad + m_1 F(r_1)\cos\psi + m_1 F(\Delta)\cos\varphi_2 = 0, \\
&\frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_3'\right)}{dt} + r_2\omega_1'\omega_2' + m_1 F(\Delta)\sin\varphi_2 - m_1 F(r_1)\sin\psi = 0, \\
&\qquad \frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_2'\right)}{dt} - r_2\omega_1'\omega_3' = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.43')$$

Если мы допустим теперь, что точка M_2 является пассивно действующей, то

$$F_{02} = F_{12} \equiv 0$$

и уравнения (8.42) и (8.43) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_1}{dt^2} - \left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) r_1 + F\left(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1\right) = 0, \\
&\frac{d\left(r_1^2\omega_3\right)}{dt} + r_1^2\omega_1\omega_2 = 0, \quad \frac{d\left(r_1^2\omega_2\right)}{dt} - r_1^2\omega_1\omega_3 = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (8.42'')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_2}{dt^2} - \left(\omega_2'^2 + \omega_3'^2\right) r_2 + m_0 F_{20}\left(t;\ r_2,\ \dot r_2,\ \ddot r_2\right) + \\
&+ m_1 F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r,\ \ddot r_1)\cos\psi + m_1 F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\cos\varphi_2 = 0, \\
&\frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_3'\right)}{dt} + r_2\omega_1'\omega_2' - m_1 F_{01}\left(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1\right)\sin\psi + \\
&\qquad\qquad + m_1 F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\sin\varphi_2 = 0, \\
&\qquad \frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_2'\right)}{dt} - r_2\omega_1'\omega_3' = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (8.43'')$$

причем в (8.42″) для сокращения положено

$$F(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) = m_0 F_{10}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + m_1 F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1).$$

Эти уравнения являются уравнениями ограниченной задачи в переменных Ляпунова и распадаются на две системы, из которых система (8.42″) определяет движение точки M_1 относительно M_0 так, как будто бы точка M_2 не существует, а система (8.43″) определяет движение точки M_2 под действием точек M_0 и M_1, причем движение последней предполагается известным.

Из двух последних уравнений системы (8.42″) выводим без труда первый интеграл

$$r_1^4\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) = c^2, \qquad (8.44)$$

вследствие чего первое из уравнений (8.42″) приводится к уравнению второго порядка относительно радиуса-вектора точки M_1

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{c^2}{r_1^3} + F(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1) = 0. \tag{8.44′}$$

Далее, замечая, что точка M_1 находится под действием центральной силы, направленной по прямой (M_0M_1), заключаем отсюда, что орбита точки M_1 есть плоская кривая. Плоскость, в которой происходит движение точки M_1, мы можем взять за основную координатную плоскость, а тогда имеем

$$\Phi = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = \frac{dI}{dt}, \quad \omega_2 = \sin I \cdot \frac{d\Omega}{dt}, \quad \omega_3 = \cos I \cdot \frac{d\Omega}{dt}.$$

Поэтому интеграл (8.44) есть интеграл площадей, который напишем, полагая $\Omega = v$, в обычном виде:

$$r_1^2 \frac{dv}{dt} = c. \tag{8.44″}$$

§ 3. Частные решения задачи трех тел

Мы видели во второй части этой книги, что общая ограниченная задача трех тел может допускать простые частные решения, называемые *либрационными*, в которых пассивная точка образует с активными точками равносторонний треугольник (*лагранжевы* решения (L_4) и (L_5)) или лежит на одной прямой, проходящей через активные точки (*эйлеровы* решения (L_1), (L_2), (L_3)).

Мы покажем теперь, что аналогичные решения может допускать и общая задача трех тел (материальных точек!), если законы действующих сил удовлетворяют некоторым условиям.

1. Рассмотрим уравнения задачи трех тел в переменных Ляпунова, т. е. уравнения (8.42) и (8.43). Мы знаем из многих курсов по небесной механике, что в случае, когда все действующие силы подчиняются закону Ньютона, уравнения движения допускают всегда частное решение, в котором все три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся с постоянной угловой скоростью в некоторой неизменной плоскости вокруг одной из его вершин или, что то же, вокруг общего центра масс.

Допустим, что уравнения (8.42) и (8.43) также допускают аналогичное решение. Тогда этим уравнениям должны удовлетворять следующие значения переменных Ляпунова:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' = 0,\\ \psi = \varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ,\\ r_1 = r_2 = \Delta = \rho(t),\\ \omega_3 = \omega_3' = \omega(t), \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

и, как следует из (8.38),

$$\Omega = \mathrm{const}, \quad I = \mathrm{const}, \quad \Phi = \omega(t).$$

Если уравнения движения действительно допускают решения (L), то (8.42) и (8.43) должны приводиться к следующим тождествам:

$$\begin{aligned} &\ddot\rho - \rho\omega^2 + m_0F_{10}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}m_2F_{02}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + \frac{1}{2}m_2F_{12}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) \equiv 0,\\ &\ddot\rho - \rho\omega^2 + m_0F_{20}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + m_2F_{02}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + \frac{1}{2}m_1F_{21}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) \equiv 0,\\ &\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\omega)}{dt} + \frac{\sqrt{3}}{2}m_2F_{02}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) - \frac{\sqrt{3}}{2}m_2F_{12}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) \equiv 0,\\ &\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\omega)}{dt} + \frac{\sqrt{3}}{2}m_1F_{21}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) - \frac{\sqrt{3}}{2}m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) \equiv 0. \end{aligned}$$

Третьи уравнения систем (8.42) и (8.43) решениями (L) удовлетворяются сами собой.

Рассматривая четыре написанных равенства, мы видим, что для того чтобы они были совместны и определяли две остающиеся неизвестными функции $\rho(t)$ и $\omega(t)$, необходимо должно быть

$$\begin{aligned} &2m_0[F_{10}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) - F_{20}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)] + m_1[F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) - \\ &\qquad - F_{21}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)] + m_2[F_{12}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) - F_{02}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)] \equiv 0,\\ &m_1[F_{21}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) - F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)] \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv m_2[F_{02}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) - F_{12}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)]. \end{aligned}$$

Так как массы m_0, m_1, m_2 совершенно произвольны, а функции F_{ij} от масс не зависят, то эти тождества могут иметь место только при выполнении следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) = F_{20}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho),\\ F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) = F_{21}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho),\\ F_{12}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) = F_{02}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho). \end{aligned}\right\} \qquad (8.45)$$

Условия (8.45) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы уравнения (8.42) и (8.43) допускали решение (L), и имеют простой механический смысл. Действительно, условия (8.45) показывают, что рассматриваемая общая задача трех тел может иметь треугольные лагранжевы решения только в том случае, когда каждая из точек M_i ($i = 0, 1, 2$) действует на каждую из двух других точек по одному и тому же закону (притяжения или отталкивания), так что мы имеем дело в самом общем случае не с шестью, а только с тремя разными законами сил.

Если хотя бы одно из условий (8.45) не выполняется, то задача не допускает лагранжева решения. Такой случай представляется, например, в задаче двух неподвижных центров, характеризуемой условиями

$$F_{01} = F_{10} = 0, \quad F_{02} = F_{12} = 0, \quad F_{20} \neq F_{21} \neq 0,$$

и к которой относится, в частности, классическая задача двух неподвижных центров. В этой задаче точки M_0 и M_1 вовсе не действуют друг на друга и могут считаться неподвижными, но действуют, и притом вообще различным образом, на точку M_2 масса которой $m_2 \neq 0$. Тогда из условий (8.45) выполняется только последнее, а поэтому всякая задача с двумя неподвижными центрами заведомо не имеет лагранжевых решений.

Если точка M_2 является пассивно действующей, а две остальные — активными, т. е. если $F_{12} = F_{02} = 0$, то последнее из условий (8.45) выполняется само собой и для существования лагранжева решения в ограниченной задаче мы имеем только два первые из условий (8.45), что и было показано во второй части книги.

Примером задачи, в которой условия (8.45) заведомо выполняются, может служить задача, в которой все функции F_{ij} одинаковы, т. е. когда в рассматриваемой системе трех материальных точек мы имеем один-единственный закон, зависящий произвольным образом от времени, взаимного расстояния и его двух первых производных.

2. Если условия (8.45) выполняются, то начальные условия всегда можно выбрать таким образом, что точки M_1 и M_2 будут описывать относительно точки M_0, в неизменной плоскости, подобные орбиты, образуя вместе с M_0 равносторонний треугольник.

Движения точек M_1 и M_2 определятся тогда следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\omega^2 + R(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) = 0, \\ \rho^2\omega = c, \end{aligned}\right\} \tag{8.46}$$

где c — произвольная постоянная (постоянная площадей), а функция R определяется формулой

$$R = m_0 F_{10} + m_1 F_{01} + m_2 F_{12}. \qquad (8.46')$$

Уравнения (8.46) можно, очевидно, рассматривать как уравнения движения материальной точки единичной массы под действием центральной силы, источником которой является точка M_0. Эта задача была рассмотрена также во второй части.

Заметим, что всякому решению системы (8.46) соответствует два треугольных лагранжевых решения, соответствующие двум равносторонним треугольникам с общим основанием $\overline{M_0 M_1}$.

Пусть v_1 и v_2 — углы, образуемые радиусами-векторами r_1 и r_2 с каким-либо неизменным направлением в плоскости треугольника $(M_0 M_1 M_2)$, например, с линией узлов этой неизменной плоскости на плоскости (xy). Тогда в каждом из двух лагранжевых решений, которые обозначим символами (L_4) и (L_5), углы v_1 и v_2 определятся формулами

$$v_1 = \Phi, \qquad v_2 = \Phi + 60^\circ \qquad (L_4)$$

и

$$v_1 = \Phi, \qquad v_2 = \Phi - 60^\circ, \qquad (L_5)$$

где

$$\Phi = \int_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt + \Phi_0.$$

Функция $\omega(t)$, определяющая угловую скорость вращения изменяющегося равностороннего треугольника $(M_0 M_1 M_2)$ вокруг его вершины, будет известна, если найдена функция $\rho(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{c^2}{\rho^3} + R(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) = 0, \qquad (8.46'')$$

которое в некоторых случаях, как было показано во второй части книги, интегрируется в квадратурах.

Особенно важным случаем является тот, когда среди решений уравнения (8.46″) имеются постоянные решения, соответствующие случаю, когда треугольник $(M_0 M_1 M_2)$ является неизменным равносторонним треугольником.

Это будет иметь место всегда в том случае, когда функция R при некотором постоянном значении $\rho = a$ приводится к положительной постоянной, т. е. когда мы имеем

$$R(t;\ a,\ 0,\ 0) = \text{const} > 0.$$

В этом случае уравнение (8.46″) удовлетворяется при всяком значении t, если $\rho = a$, и задача имеет круговое лагранжево решение, в котором точки M_1 и M_2 описывают вокруг точки M_0 одну и ту же окружность радиуса a с центром в M_0 и с постоянной угловой скоростью, определяемой формулой

$$\omega = \frac{c}{a^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{a} R(t;\ a,\ 0,\ 0)}\ .$$

Если функция R не содержит явно времени t, то круговое решение будет существовать для всякого значения постоянной a, для которого $R(a, 0, 0) > 0$.

Формула (8.46′) показывает, что для выполнения неравенства $R > 0$ необходимо, чтобы все три функции F_{10}, F_{01}, F_{12} приводились при $\rho = a$ к некоторым постоянным и чтобы по крайней мере одна из этих постоянных была положительной, т. е. чтобы из трех различных законов сил по крайней мере один был законом притяжения.

Таким образом, если все силы, управляющие движением системы трех тел-точек, являются силами отталкивания, то задача заведомо не допускает кругового лагранжева решения.

Примечание. Мы рассматривали движение двух точек M_1 и M_2 относительно точки M_0. В лагранжевом решении треугольник $(M_0M_1M_2)$ (переменный или постоянный) вращается вокруг вершины M_0.

Но совершенно так же можно рассматривать движения всех трех точек относительно общего центра масс G. Тогда в лагранжевом решении треугольник $(M_0M_1M_2)$ будет вращаться вокруг точки G, и точки M_0, M_1, M_2 будут описывать в плоскости треугольника подобные орбиты.

3. Мы видели во второй части книги, что ограниченная задача трех тел-точек в частном случае, когда две из трех масс одинаковы, может допускать еще решение, в котором треугольник $(M_0M_1M_2)$ остается всегда равнобедренным, основанием которого является отрезок, соединяющий активные массы.

Посмотрим теперь, в каких случаях общая задача трех материальных точек может допускать аналогичное решение.

Пусть массы точек M_1 и M_2 одинаковы, так что $m_1 = m_2 \neq m_0$, и установим условия, при которых точка M_0 является вершиной равнобедренного треугольника, двумя другими вершинами которого оказываются точки M_1 и M_2.

Если такое решение существует, то уравнения (8.42) и (8.43) должны допускать частное решение, в котором

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' &= 0, \\ r_1 = r_2 &= \rho(t), \\ \Delta &= 2\rho \sin\frac{\psi}{2}, \\ \varphi_2 &= \varphi_1. \end{aligned}\right\} \qquad (L')$$

Рассматривая уравнения (8.42) и (8.43), мы убеждаемся, что оба третьих уравнения этих систем удовлетворяются тождественно при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2'$. Первые уравнения этих систем будут тождественными при выполнении условия

$$\begin{gathered} m_0 F_{10}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + m_1 F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + \\ + m_1 F_{02}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1)\cos\psi + m_1 F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\cos\varphi_1 = \\ = m_0 F_{20}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + m_1 F_{02}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + \\ + m_1 F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1)\cos\psi + m_1 F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\cos\varphi_1. \end{gathered} \tag{8.47}$$

Условие (8.47) будет выполнено при любых значениях величин r_1, φ_1 и ψ, если законы действующих сил таковы, что мы имеем

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) &= F_{20}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1), \\ F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) &= F_{02}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1), \\ F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta) &= F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta). \end{aligned}\right\} \tag{8.47'}$$

При этих же условиях вторые уравнения систем (8.42) и (8.43) будут совпадать только в том случае, если

$$\omega_3' = -\omega_3 = \omega(t).$$

Условия (8.47′) означают, что масса M_0 должна действовать на массы точек M_1 и M_2 по общему закону, что точки M_1 и M_2 должны также действовать на M_0 по общему закону, вообще отличному от предыдущего, и что действия точек M_1 и M_2 друг на друга должны быть одинаковы.

Условия (8.47′), разумеется, выполняются, если все функции F_{ij} одинаковы, т. е. если движение трех тел-точек управляется одним общим законом, например, законом Ньютона, или вообще законом, зависящим только от взаимных расстояний между каждыми двумя точками.

Уравнения (8.42) и (8.43) приводятся при условиях (8.47′) к следующим двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\rho - \omega^2\rho + R = 0, \\ &\frac{d\,(\rho^2\omega)}{dt} + \rho\Omega = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

где вследствие $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 2\varphi_1 + \psi = 180°$

$$\cos\varphi_1 = \sin\frac{\psi}{2},\quad \sin\varphi_1 = \cos\frac{\psi}{2},\quad \psi = 2\bar\psi,$$

и вследствие (8.40)

$$\frac{d\bar\psi}{dt} = \omega.$$

Функции R и Ω определяются вследствие условий (8.47′) следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} R &= m_0F_{10}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + 2m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\cos^2\bar\psi + \\ &\qquad + m_1F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\sin\bar\psi, \\ \Omega &= m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\sin 2\bar\psi - m_1F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\cos\bar\psi, \\ \Delta &= 2\rho\sin\bar\psi, \end{aligned}\right\} \quad (8.49)$$

и являются функциями двух переменных ρ и $\bar\psi$ и их производных первого и второго порядка.

Поэтому решения, определяющие равнобедренный треугольник с вершиной в точке M_0 удобнее написать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\bar\psi}{dt}\right)^2 + R = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\bar\psi}{dt}\right) + \rho\Omega = 0, \end{aligned}\right\} \quad (8.50)$$

и эти уравнения составляют систему двух уравнений второго порядка с двумя искомыми функциями ρ и $\bar\psi$, которые полностью определяют равнобедренный треугольник.

Уравнения (8.50) показывают, что равнобедренные треугольные решения могут существовать и что при этом стороны треугольника и угол при вершине изменяются одновременно и вдобавок этот изменяющийся треугольник вращается вокруг вершины M_0, оставаясь всегда в одной плоскости, образованной начальными радиусами-векторами.

В частности, угол при вершине ψ может оставаться постоянным, и тогда треугольник не вращается, но стороны его непрерывно изменяются.

Наоборот, может случиться, что равные стороны остаются постоянными, а угол ψ и угловая скорость ω изменяются.

Например, пусть все законы сил являются одним и тем же степенным законом, так что

$$F_{01} = F_{10} = f\cdot\rho^k, \qquad F_{12} = f\cdot\Delta^k = f\cdot 2^k\cdot\rho^k\cdot\sin^k\bar\psi.$$

Тогда, если положить $f=1$, $m_2+2m_1=1$, получим из (8.50) следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\bar\psi}{dt}\right)^2 + \rho^k(1 - 2m_1\sin^2\bar\psi + 2^k m_1\sin^{k+1}\bar\psi) = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\bar\psi}{dt}\right) + m_1\rho^{k+1}\cdot\sin 2\bar\psi\,(1 - 2^{k-1}\sin^{k-1}\bar\psi) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8.50')$$

Отсюда следует, что $\bar{\psi}$ может быть постоянным или когда $\sin 2\bar{\psi} = 0$, но тогда $\psi = 0$ или 180° и точки M_0, M_1, M_2 не образуют треугольника, или когда $\sin\bar{\psi} = \frac{1}{2}$, т. е. $\bar{\psi} = 30^\circ$ и $\psi = 60^\circ$, т. е. треугольник остается равносторонним. Сторона ρ определяется в этом случае уравнением

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{3}{2} m_1 \cdot \rho^k = 0,$$

которое может быть проинтегрировано в квадратурах.

Допустим, что в уравнениях (8.50′) сторона ρ остается постоянной, которую примем для простоты равной единице.

Тогда угол $\bar{\psi}$ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{dt^2} - \operatorname{ctg}\bar{\psi} \cdot \left(\frac{d\bar{\psi}}{dt}\right)^2 + (2\operatorname{ctg}\bar{\psi} - 3m_1 \sin 2\bar{\psi}) = 0.$$

В этом случае треугольник остается равнобедренным, но с переменным углом при вершине M_0. Предыдущее уравнение допускает и постоянное решение, в котором угол $\bar{\psi}$ определяется из условия

$$\sin^2\bar{\psi} = \frac{1}{3m_1}.$$

При других законах сил могут, конечно, представиться и разные другие случаи.

4. Посмотрим теперь, при каких условиях рассматриваемая (обобщенная) задача трех тел-точек может допускать *прямолинейные эйлеровы решения*, в которых все три точки всегда остаются на одной прямой, вращающейся вокруг точки M_0, а отношения между расстояниями этих точек *остаются постоянными*.

Покажем, что такие решения могут существовать и притом не только при выполнении условий (8.45), которые необходимы для существования лагранжевых решений, но и тогда, когда все шесть функций F_{ij} совершенно различны.

Для этого убедимся, что уравнения (8.42) и (8.43) могут быть удовлетворены при

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' = 0,\\ \omega_3 = \omega_3' = \omega(t),\\ r_1 = \rho, \quad r_2 = \alpha\rho \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

(α — положительная постоянная), а один из трех углов треугольника ($M_0M_1M_2$) равен 180° (два других, конечно, равны нулю).

Поэтому если наша задача допускает такие прямолинейные решения, то таких решений должно быть не меньше трех, в зависимости от того, какой из трех углов треугольника равен 180°.

Обозначим так же, как и во второй части, эти три возможные эйлеровы решения (L_1), (L_2), (L_3), характеризуя их при выполнении (E) следующими значениями остальных переменных:

$$\left.\begin{array}{c}\psi=180^\circ,\quad \varphi_1=0,\quad \varphi_2=0,\\ \Delta_1=(1+\alpha)\rho,\end{array}\right\} \qquad (L_1)$$

$$\left.\begin{array}{c}\psi=0,\quad \varphi_1=180^\circ,\quad \varphi_2=0,\\ \Delta_2=(\alpha-1)\rho,\quad \alpha>1,\end{array}\right\} \qquad (L_2)$$

$$\left.\begin{array}{c}\psi=0,\quad \varphi_1=0,\quad \varphi_2=180^\circ,\\ \Delta_3=(1-\alpha)\rho,\quad \alpha<1.\end{array}\right\} \qquad (L_3)$$

Задача будет допускать прямолинейные решения, если возможно определить функции ρ, ω и постоянную $\alpha>0$ так, чтобы все уравнения (8.42) и (8.43) были удовлетворены.

Для этого мы должны, очевидно, иметь $(i=1, 2, 3)$

$$\left.\begin{array}{r}\rho^2\omega=c=\mathrm{const},\\ \ddot\rho-\rho\omega^2+R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha)=0,\\ \alpha\ddot\rho-\alpha\rho\omega^2+R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha)=0,\end{array}\right\} \qquad (8.51)$$

где функции R_i и R_i^* для каждого из прямолинейных решений (L_i) имеют следующие значения $(i=1, 2, 3)$:

$$\left.\begin{array}{l}R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha)=m_0F_{10}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)+m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\mp\\ \qquad\mp m_2F_{02}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot\rho,\ \alpha\ddot\rho)+(-1)^{i-1}m_2F_2(t;\ \Delta_i,\ \dot\Delta_i,\ \ddot\Delta_i),\\ R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha)=m_0F_{20}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot\rho,\ \alpha\ddot\rho)+\\ \qquad+m_2F_{02}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot\rho,\ \alpha\ddot\rho)\mp\\ \qquad\mp m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\mp(-1)^{i-1}m_1F_{21}(t;\ \Delta_i,\ \dot\Delta_i,\ \ddot\Delta_i),\end{array}\right\} \qquad (8.52)$$

причем в каждом из этих выражений верхний знак («—») нужно взять для решения (L_1), а нижний («+») для (L_2) и (L_3).

В каждом из эйлеровых решений (L_i) функция ρ должна удовлетворять одновременно двум уравнениям, которые поэтому должны быть тождественными, а следовательно, условием существования прямолинейного решения (L_i) должно быть следующее равенство:

$$\alpha R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha)=R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha), \qquad (8.53)$$

которое должно выполняться для всякого значения t.

Для того чтобы из уравнения (8.53) можно было определить положительную постоянную α, определяющую расположение трех точек на вращающейся прямой, это уравнение, очевидно, не должно содержать t ни явно, ни неявно (т. е. через посредство ρ). Поэтому в самом общем случае, когда все шесть функций F_{ij} совершенно произвольны, наша задача не допускает прямолинейных решений, аналогичных эйлеровым решениям классической задачи трех тел-точек (см. нашу книгу «Небесная механика. Основные задачи и методы», изд. 3-е, 1975).

Поэтому законы действующих сил не должны зависеть от времени, а ρ должно быть величиной постоянной или должно автоматически исключиться из уравнения (8.53).

Если функция F_{ij} не содержит t, то функции (8.52) также не будут содержать время и вместо (8.53) мы будем иметь уравнение вида

$$\alpha R_i(\rho, \dot\rho, \ddot\rho; \alpha) = R_i^*(\rho, \dot\rho, \ddot\rho; \alpha), \tag{8.53'}$$

которое представляет уравнение с одной неизвестной α, если задано постоянное значение $\rho = a$, определяющее положение точки M_1 на прямой, проходящей через точку M_0.

Если найденное из уравнения (8.53′) значение α окажется положительным и отвечающим соответствующему решению (L_i), то задача имеет постоянное эйлерово решение, в котором обе точки, M_1 и M_2, описывают концентрические окружности с центром в точке M_0, с радиусами a и αa соответственно и с постоянной угловой скоростью ω, определяемой формулой

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{a} R_i(a, 0, 0; \alpha)}. \tag{8.54}$$

Это круговое движение будет действительным, очевидно, только в том случае, когда выражение, стоящее под знаком корня, будет положительным.

Непостоянных (т. е. не круговых!) эйлеровых решений наша задача при произвольно заданных функциях F_{ij} не имеет.

Однако некруговые эйлеровы решения могут существовать, если функции F_{ij} обладают некоторой специальной структурой.

Действительно, пусть мы имеем

$$F_{ij}(t; \Delta_{ij}, \dot\Delta_{ij}, \ddot\Delta_{ij}) = f(t)\cdot\tilde F_{ij}(\Delta_{ij}, \dot\Delta_{ij}, \ddot\Delta_{ij}), \tag{8.55}$$

где $f(t)$ — общий множитель, зависящий от времени или постоянный, а все функции $\tilde F_{ij}$ обладают одним и тем же свойством, выражаемым формулой

$$\tilde F_{ij}(xz, x\dot z, x\ddot z) = \Phi_{ij}(x)\cdot\Psi(z, \dot z, \ddot z), \tag{8.55'}$$

причем второй множитель не зависит от индексов i, j и есть произвольно заданная функция указанных аргументов.

В этом случае функции R_i и R_i^* определятся следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) &= f(t)\cdot\Psi(\rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\cdot \mathrm{P}_i(\alpha),\\ R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) &= f(t)\cdot\Psi(\rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\cdot \mathrm{P}_i^*(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{8.52'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_i(\alpha) &= m_0\Phi_{10}(1) + m_1\Phi_{01}(1) \mp m_2\Phi_{02}(\alpha) + (-1)^{i-1} m_2\Phi_{12}\left(\frac{\Delta_i}{\rho}\right),\\ \mathrm{P}_i^*(\alpha) &= m_0\Phi_{20}(\alpha) + m_2\Phi_{02}(\alpha) \mp m_1\Phi_{01}(1) \mp (-1)^i m_1\Phi_{21}\left(\frac{\Delta_i}{\rho}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

с такими же знаками, как и в формулах (8.52).

Вместо (8.53) мы будем иметь теперь следующее уравнение:

$$\alpha \mathrm{P}_i(\alpha) = \mathrm{P}_i^*(\alpha) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{8.56'}$$

которое не содержит ни t, ни ρ и из которого возможно определить нужную постоянную α.

Уравнение (8.56′) представляет собой обобщение знаменитого уравнения Эйлера, определяющего расположение трех точечных масс в прямолинейных решениях классической задачи трех тел.

Если это уравнение имеет положительный корень ($\alpha > 0$ для (L_1), $\alpha > 1$ для (L_2) и $\alpha < 1$ для (L_3)), то рассматриваемая обобщенная задача имеет соответствующее прямолинейное, непостоянное (т. е. не круговое!) решение, определяемое уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \ddot\rho - \frac{c^2}{\rho^3} + f(t)\cdot \mathrm{P}_i(\alpha)\cdot\Psi(\rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) &= 0,\\ \rho^2\omega &= c, \end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

которые вообще не интегрируются в квадратурах.

Простейшим примером законов типа (8.55) может служить случай, когда

$$F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot\Delta_{ij},\ \ddot\Delta_{ij}) = f_{ij}\cdot f(t)\cdot \Delta_{ij}^n \dot\Delta_{ij}^m \ddot\Delta_{ij}^p, \tag{8.58}$$

где f_{ij} — постоянные коэффициенты пропорциональности, имеющие одинаковую размерность, $f(t)$ — безразмерная функция времени (в частности, — постоянное число), а n, m, p — заданные вещественные числа.

В этом случае

$$\widetilde{F}_{ij}(x\Delta_{ij},\ x\dot\Delta_{ij},\ x\ddot\Delta_{ij}) = f_{ij}x^{n+m+p}\Delta_{ij}^n \dot\Delta_{ij}^m \ddot\Delta_{ij}^p,$$

так что

$$\Phi_{ij}(x) = f_{ij}x^{n+m+p}, \quad \Psi(z, \dot{z}, \ddot{z}) = z^n \dot{z}^m \ddot{z}^p,$$

и формулы (8.56) дают функции $P_i(\alpha)$ и $P_i^*(\alpha)$, после чего можем составить для каждого из прямолинейных решений (L_i) уравнение (8.56′). Эти уравнения в данном случае являются алгебраическими и могут быть написаны следующим образом:

$$\alpha\left[m_0 f_{10} + m_1 f_{01} - m_2 f_{02}\alpha^{n+m+p} + m_2 f_{12}(1+\alpha)^{n+m+p}\right] =$$
$$= (m_0 f_{20} + m_2 f_{02})\alpha^{n+m+p} - m_1 f_{01} + m_1 f_{21}(1+\alpha)^{n+m+p}; \qquad (L_1)$$
$$\alpha\left[m_0 f_{10} + m_1 f_{01} + m_2 f_{02}\alpha^{n+m+p} - m_2 f_{12}(\alpha-1)^{n+m+p}\right] =$$
$$= (m_0 f_{20} + m_2 f_{02})\alpha^{n+m+p} + m_1 f_{01} + m_1 f_{21}(\alpha-1)^{n+m+p}; \qquad (L_2)$$
$$\alpha\left[m_0 f_{10} + m_1 f_{01} + m_2 f_{02}\alpha^{n+m+p} + m_2 f_{12}(1-\alpha)^{n+m+p}\right] =$$
$$= (m_0 f_{20} + m_2 f_{02})\alpha^{n+m+p} + m_1 f_{01} - m_1 f_{21}(1-\alpha)^{n+m+p}. \qquad (L_3)$$

Существование необходимого для каждого из решений (L_i) корня α зависит теперь от числовых значений коэффициентов f_{ij} и от числа $n+m+p$.

В простейшем случае $n+m+p=1$. Тогда каждое из предыдущих уравнений превращается в линейное, вида

$$A_i\alpha = A_i^*, \qquad (8.59)$$

где A_i и A_i^* — билинейные комбинации масс и коэффициентов пропорциональности, легко выводимые из предыдущих уравнений.

Из (8.59) следует, что для существования прямолинейных решений в рассматриваемом случае необходимо, чтобы коэффициенты A_i и A_i^* имели (для данного номера i) одинаковые знаки.

Для решения (L_1) это условие является также и достаточным, но для (L_2) и (L_3) нужно, чтобы выполнялись еще дополнительные условия

$$|A_2| < |A_2^*|, \qquad |A_3| > |A_3^*|.$$

Отметим, что могут представиться случаи, когда уравнение (8.59) вырождается в тождество. Это будет иметь место, например, в случае

$$f_{ij} = f, \quad n = 1, \quad m = p = 0.$$

Тогда каждая точка прямой, проходящей через точки M_0 и M_1, является прямолинейной точкой либрации.

Такой же случай мы отметили и для ограниченной задачи, когда все действующие силы определяются единым законом — законом Гука.

5. Рассмотрим в заключение этого параграфа случай, когда все действующие силы определяются одним-единственным степенным законом, т. е. когда

$$F_{ij} = f \cdot \Delta_{ij}^{n}. \tag{8.60}$$

Этот случай, так же как и случай закона Гука, является частным случаем законов вида (8.58), когда

$$f_{ij} = f, \quad f(t) = 1, \quad m = p = 0. \tag{8.60$'$}$$

Уравнения, определяющие постоянную α, принимают в этом случае следующий вид:

$$L_1(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha - m_2\alpha^{n+1} + m_2\alpha(1+\alpha)^n - m_1(1+\alpha)^n + \\ + m_1 - (m_0 + m_2)\alpha^n = 0; \tag{8.61}$$

$$L_2(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha + m_2\alpha^{n+1} - m_2(\alpha - 1)^n \cdot \alpha - m_1(\alpha - 1)^n - \\ - m_1 - (m_0 + m_2)\alpha^n = 0; \tag{8.61$'$}$$

$$L_3(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha + m_2\alpha^{n+1} + m_2\alpha(1-\alpha)^n + m_1(1-\alpha)^n - \\ - m_1 - (m_0 + m_2)\alpha^n = 0. \tag{8.61$''$}$$

Из этих равенств имеем

$$L_1(0) = 0; \quad L_2(1) = 0, \quad L_3(0) = 0.$$

Эти равенства показывают, что если показатель n есть число положительное, то точка (L_1) совпадает с точкой (M_0), точка (L_2) совпадает с точкой (M_2) и точка (L_3) также совпадает с точкой (M_2).

Таким образом, при всяком $n > 0$ задача имеет всегда три прямолинейных решения. Но задача может иметь и другие точки либрации, отличные от очевидных указанных, примером чего служит отмеченный уже случай закона Гука, когда всякая точка прямой, проходящей через (M_0) и (M_2), дает решение задачи.

Если $n \neq 1$, то нужно тщательно исследовать написанные выше уравнения, что представляет нелегкую алгебраическую задачу, рассмотрение которой мы производить не будем.

Пусть теперь показатель степени закона (8.60) есть число отрицательное и положим для удобства $n = -N$ (в частности, $N = 2$ соответствует классической задаче с законом Ньютона).

Тогда уравнения, определяющие α, перепишем последовательно следующим образом:

$$L_1^*(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha^{N+1}(1+\alpha)^N + m_1\alpha^N(1+\alpha)^N - m_2\alpha(1+\alpha)^N + \\ + m_2\alpha^{N+1} - m_1\alpha^N - (m_0 + m_2)(1+\alpha)^N = 0, \tag{8.62}$$

откуда имеем

$$L_1^*(0) = -(m_0 + m_2) < 0; \quad L_1^*(1) = m_1(2^{N+1} - 1) + m_2 > 0.$$

Эти неравенства показывают, что уравнение $L_1^*(\alpha) = 0$ имеет корень (или вообще нечетное число корней) в промежутке $(0, 1)$.

Таким образом, если поместить точку (M_1) на прямой (M_0M_2) слева от точки (M_0) на расстоянии, большем чем $\overline{M_0M_2}$, то получим первое эйлерово решение.

Далее, имеем

$$L_2^*(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha^{N+1}(\alpha - 1)^N - m_1\alpha^N(\alpha - 1)^N + m_2\alpha(\alpha - 1)^N - \\ - m_2\alpha^{N+1} - m_1\alpha^N - (m_0 + m_2)(\alpha - 1)^N = 0. \quad (8.62')$$

Простое вычисление дает

$$L_2^*(1) = -m_0 - m_1 < 0, \quad L_2^*(2) = (m_0 + m_2)(2^{N+1} - 1) + m_1 2^{N+1} > 0.$$

Эти неравенства показывают, что в промежутке $1 < \alpha < 2$ написанное уравнение имеет по крайней мере один (или вообще нечетное число) корень. Таким образом, помещая точку (M_1) между точками (M_0) и (M_2), мы получим второе эйлерово решение.

Наконец, выписываем третье уравнение

$$L_3^*(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha^{N+1}(1-\alpha)^N - m_1\alpha^N(1-\alpha)^N - (m_1 + m_2)(1-\alpha)^N + \\ + m_2\alpha^{N+1} + m_2(1 - \alpha)^N + m_1\alpha^N = 0, \quad (8.62'')$$

откуда

$$L_3^*(0) = -m_1 < 0; \quad L_3^*(1) = m_1 + m_2 > 0,$$

т. е. последнее уравнение имеет один (или вообще нечетное число) корень в промежутке $0 < \alpha < 1$. Следовательно, если мы поместим точку (M_1) на прямой (M_0M_2) справа от (M_2), то получим третье эйлерово решение нашей задачи.

Полученные результаты справедливы для любого положительного N, каковы бы ни были массы точек m_0, m_1 и m_2.

При $N = -2$ каждое из трех последних уравнений превращается в уравнение Эйлера пятой степени классической задачи.

Уравнение, определяющее орбиты точек (M_1) и (M_2) относительно точки (M_0) в неизменной плоскости, получим для закона (8.60) из (8.57) в виде $(n = -N)$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} + \frac{f\mathrm{P}_i(\alpha)}{\rho^N} &= 0, \\ \rho^2 \frac{dv}{dt} &= c, \end{aligned}\right\} \quad (8.63)$$

где v — угол, образуемый вращающейся прямой $(M_0M_1M_2)$ вокруг точки (M_0) с некоторым неизменным направлением в плоскости, в которой вращается прямая.

Постоянная $P_i(\alpha)$ вычисляется по формуле (8.56) и имеет, следовательно, для каждого из трех эйлеровых решений следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} P_1(\alpha_1) &= m_0 + m_1 - \frac{m_2}{\alpha_1^N} + \frac{m_2}{(1+\alpha_1)^N}, \\ P_2(\alpha_2) &= m_0 + m_1 + \frac{m_2}{\alpha_2^N} - \frac{m_2}{(\alpha_2-1)^N}, \\ P_3(\alpha_3) &= m_0 + m_1 + \frac{m_2}{\alpha_3^N} + \frac{m_2}{(1-\alpha_3)^N}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.63')$$

где α_i обозначает положительный корень уравнения

$$L_i^*(\alpha) = 0.$$

Уравнения (8.63) для каждого $i = 1, 2, 3$ можно, очевидно, рассматривать как уравнения движения материальной точки, находящейся под действием силы, обратно пропорциональной N-й степени расстояния до центра силы.

В частности, для $N = 2$, т. е. для случая закона Ньютона, уравнения (8.63) определяют кеплеровское движение и орбита каждой из точек M_1 и M_2 есть кривая второго порядка с фокусом в точке M_0. Главный интерес представляют, конечно, случаи, когда эта орбита есть окружность или эллипс.

Примечание. Для того чтобы лагранжево или эйлерово движения были возможны, очевидно, необходимо, чтобы начальное значение величины ρ удовлетворяло следующим условиям: для лагранжевых решений $\rho(t_0)$ должно быть больше наибольшей из величин

$$a_0 + a_1, \quad a_0 + a_2, \quad a_1 + a_2,$$

где a_i обозначает радиус наибольшего из сечений тела T_i плоскостью, перпендикулярной к оси симметрии тела.

Для эйлеровых решений $\rho(t_0)$ должно удовлетворять условиям:

для (L_1) должно быть $\quad a_0 + a_2 < \rho_1(t_0)$,

для (L_2) » » $\quad a_0 + a_2 < \rho_2(t_0) < \rho(t_0) - a_1 - a_2$,

для (L_3) » » $\quad \rho(t_0) + a_1 + a_2 < \rho_3(t_0)$.

Если какое-либо из этих условий выполняется, то соответствующее движение или продолжается сколь угодно долго, или два из трех тел сталкиваются в некоторый конечный момент $t = t_1$, после чего задача перестает иметь смысл.

§ 4. Задача об устойчивости лагранжевых решений

Во второй части этой книги рассматривалась ограниченная задача трех тел-точек, общая относительно законов взаимодействий активных точек с пассивной.

В этой части мы рассматриваем неограниченные задачи, когда все тела-точки являются активно действующими и законы взаимодействий предполагаются, вообще говоря, наиболее общими.

В задаче трех тел-точек были обнаружены частные решения, аналогичные либрационным решениям ограниченной задачи, и теперь естественно перейти к рассмотрению вопроса об устойчивости этих частных решений в смысле Ляпунова.

Однако при самых общих предположениях относительно действующих сил эта задача, несомненно, весьма трудна, а поэтому мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда все действующие силы одинаковы по своему характеру и зависят только от взаимного расстояния между точками.

Такая задача была поставлена еще Лапласом, который заметил, что лагранжевы и эйлеровы решения существуют также при произвольном законе притяжения.

Задача об устойчивости постоянного лагранжева решения для случая притяжения, пропорционального какой-либо степени расстояния, была рассмотрена в первом приближении Раусом еще в 1875 г.

Предполагая, что все три точки всегда остаются в одной плоскости, Раус пришел к следующему результату:

Если притяжение пропорционально произведению масс двух точек и обратно пропорционально N-й степени взаимного расстояния, то лагранжево решение задачи трех тел-точек при $N > 3$ всегда неустойчиво. Если же $N < 3$, то это движение устойчиво, если выполнено неравенство

$$\frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2} > 3\left(\frac{1+N}{3-N}\right)^2.$$

Для случая, когда взаимодействие определяется единым законом, зависящим только от расстояния, задачу об устойчивости лагранжева решения рассмотрел в 1889 г. А. М. Ляпунов, причем не только для случая постоянного движения, в котором точки M_1 и M_2 описывают окружности с центром в M_0, но и для более общего случая, когда невозмущенное движение оказывается непостоянным, а именно периодическим, как это имеет, например, место в случае закона Ньютона, когда точки M_1 и M_2 описывают эллипсы с фокусом в точке M_0.

В этом параграфе мы и изложим с некоторыми сокращениями результаты, полученные Ляпуновым (также в первом приближении), из которых как частный случай получаются и результаты Рауса и результаты для классической, эллиптической задачи трех тел.

1. Рассмотрим уравнения (8.42′) и (8.43′), где функция F — закон взаимодействия — остается произвольной функцией, подчиненной только самым общим условиям, при которых указанные дифференциальные уравнения имеют единственное решение для каждой неособенной системы начальных условий.

В этом случае условия (8.45) заведомо выполняются и задача имеет лагранжево треугольное решение, в котором

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' = 0, \\ \psi = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3}, \\ r_1 = r_2 = \Delta = \rho(t), \\ \omega_3 = \omega_3' = \omega(t), \end{aligned}\right\} \tag{L}$$

где функции ρ и ω должны удовлетворять уравнениям (8.46), которые в рассматриваемом случае напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\omega^2 + f(m_0 + m_1 + m_2) \cdot F(\rho) = 0, \\ \rho^2\omega = c, \end{aligned}\right\} \tag{8.64}$$

где c, как всегда, есть произвольная постоянная.

Введем вместо t новую независимую переменную — полярный угол ϑ, определяемый формулой

$$\omega\, dt = c\frac{dt}{\rho^2} = d\vartheta, \tag{8.65}$$

и положим для краткости

$$g = \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{c^2}. \tag{8.65′}$$

Тогда первое из уравнений (8.64) примет вид

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\rho} = g\rho^2 F(\rho), \tag{8.64′}$$

а это есть не что иное, как уравнение типа Бине, определяющее ρ как функцию полярного угла ϑ, т. е. уравнение (8.64′) есть дифференциальное уравнение орбиты каждой из точек M_1 и M_2 относительно центра силы M_0.

Из этого уравнения получаем обычным образом

$$d\vartheta \pm \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\sqrt{h - \frac{1}{\rho^2} - 2g\int F(\rho)\,d\rho}}, \tag{8.64''}$$

где h — произвольная постоянная.

Постоянные g и h характеризуют движение, соответствующее частному решению (L).

Предположим теперь функцию $F(\rho)$ и постоянные g и h такими, чтобы уравнение

$$h - \frac{1}{\rho^2} - 2g\int F(\rho)\,d\rho = 0 \tag{8.64*}$$

имело в числе других два простых положительных корня ρ_0 и ρ_1 и чтобы для $\rho_0 < \rho < \rho_1$ всегда было

$$h - \frac{1}{\rho^2} - 2g\int F(\rho)\,d\rho > 0.$$

При этом если начальное значение ρ заключается между пределами ρ_0 и ρ_1, то ρ будет периодической функцией от ϑ с периодом

$$\Omega = 2\int\limits_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{h\rho^2 - 1 - 2g\rho^2\int F(\rho)\,d\rho}}. \tag{8.64'''}$$

Такой случай мы имеем, например, в классической задаче, где

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$$

и постоянные g и h таковы, что в уравнении кеплеровской орбиты

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$$

эксцентриситет $e < 1$.

Тогда

$$\rho_0 = a(1-e), \quad \rho_1 = a(1+e)$$

и ρ есть периодическая функция от ϑ с периодом

$$\Omega = 2\pi.$$

Но движение может быть периодическим и при других законах, отличных от ньютоновского.

Заметим еще, что если $F(\rho)$ всегда положительна, то уравнению (8.64') удовлетворяет такое постоянное значение $\rho = a$, что мы имеем

$$ga^3F(a) = 1. \tag{8.65''}$$

В этом случае треугольник $(M_0M_1M_2)$ остается неизменным.

2. Переходим к рассмотрению вопроса об устойчивости лагранжева решения в том частном случае, который был предметом исследования А. М. Ляпунова. При этом согласно Ляпунову будем считать невозмущенное движение устойчивым, если во всяком возмущенном движении, начальные возмущения которого сколь угодно малы, треугольник во все время движения сколь угодно мало отличается от равностороннего.

Рассматривая какое-либо из треугольных лагранжевых движений как невозмущенное, составим прежде всего дифференциальные уравнения возмущенного движения.

Возьмем частное решение (L), где ρ и ω — известные функции времени, удовлетворяющие уравнениям (8.64), и поставим задачу об устойчивости этого частного решения в смысле Ляпунова относительно величин

$$r_1 - \rho, \ r_2 - \rho, \ \psi - \frac{\pi}{3}, \ \omega_3 - \omega, \ \omega_1, \ \omega_2.$$

Положим для этого

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \rho(1+\xi), \quad & r_2 &= \rho(1+\xi+x), \\ \psi &= \frac{\pi}{3} + y, \quad & \omega_3 &= \omega(1+\eta), \end{aligned}\right\} \tag{8.66}$$

и будем считать величины x, y, ξ, η, ω_1, ω_2 и их производные по времени бесконечно малыми одного и того же порядка.

Очевидно, что в невозмущенном движении мы имеем

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \tag{8.66'}$$

вследствие чего наша задача приводится к задаче об устойчивости нулевого решения (8.66') дифференциальных уравнений, которые получатся из уравнений (8.42'), (8.43') после подстановки (8.66).

Сделаем эту подстановку, разлагая нелинейные члены полученных уравнений в ряды по степеням бесконечно малых возмущений (8.66').

Выписывая только члены не выше первого порядка, мы имеем прежде всего

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= \rho\left(1+\xi+\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\ldots,\\
\cos\psi &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\ldots,\\
\sin\psi &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}y+\ldots,\\
\cos\varphi_1 &= \frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\ldots,\\
\sin\varphi_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{4}y+\ldots,\\
\cos\varphi_2 &= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\ldots,\\
\sin\varphi_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{4}y+\ldots,\\
\omega_3' &= \omega(1+\eta)+\frac{dy}{dt},\\
\omega_1' &= \frac{1}{2}\omega_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2+\ldots,\\
\omega_2' &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2+\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{8.67}$$

Предполагая функцию $F(\rho_j)$ такой, чтобы функция $F(\rho+\zeta)$ для всех рассматриваемых значений ρ и для достаточно малых ζ была разложима в абсолютно сходящийся ряд по целым положительным степеням ζ, мы можем написать

$$F(\rho+\zeta)=F(\rho)+\zeta F'(\rho)+\ldots \tag{8.67$'$}$$

Вносим величины (8.67) и (8.67′) в уравнения (8.42′), (8.43′) и выписываем в последних только члены не выше первого порядка. Тогда уравнения эти, после сокращения членов нулевого порядка вследствие (8.64), примут следующий вид:

$$\frac{d^2(\rho\xi)}{dt^2}-\rho\omega^2\xi-2\rho\omega^2\eta+f(m_0+m_1+m_2)\rho F'(\rho)\xi-$$
$$-fm_2[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y\right)+\ldots=0, \tag{8.68}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}[\rho^2\omega(2\xi+\eta)]+$$
$$+fm_2[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y\right)+\ldots=0, \tag{8.68$'$}$$

$$\frac{d^2\rho(\xi+x)}{dt^2}-\rho\omega^2(\xi+x+2\eta)-2\rho\omega\frac{dy}{dt}+ \\ +f(m_0+m_1+m_2)\rho F'(\rho)(\xi+x)+ \\ +fm_1[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{3}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}y\right)+\ldots=0, \quad (8.69)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left[\rho^2\left(2\omega(\xi+x)+\omega\eta+\frac{dy}{dt}\right)\right]- \\ -fm_1[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y\right)+\ldots=0, \quad (8.69')$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\omega_2)-\rho\omega\omega_1+\ldots=0, \quad (8.70)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}[\rho^2(\omega_2-\sqrt{3}\,\omega_1)]-\rho\omega(\sqrt{3}\,\omega_2+\omega_1)+\ldots=0. \quad (8.70')$$

В этой системе уравнения (8.69), (8.69′) и (8.70′) вследствие (8.68), (8.68′) и (8.70) приводятся к более простому виду:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2(\rho x)}{dt^2}-\rho\omega^2 x-2\rho\omega\dfrac{dy}{dt}+f(m_0+m_1+m_2)\rho F'(\rho)x+ \\ +[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left[\dfrac{3}{4}f(m_1+m_2)x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}f(m_1-m_2)y\right]+\ldots=0, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left[\rho^2\left(2\omega x+\dfrac{dy}{dt}\right)\right]- \\ -[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4}f(m_1-m_2)x+\dfrac{3}{4}f(m_1+m_2)y\right]+\ldots=0, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}(\rho^2\omega_1)+\rho\omega\omega_2=0. \end{array}\right\} \quad (8.71)$$

Наконец, при помощи (8.64) можно привести уравнения (8.68) и (8.71) к виду

$$\frac{d^2(\rho\xi)}{dt^2}-\xi\frac{d^2\rho}{dt^2}-2\rho\omega^2\eta-f(m_0+m_1+m_2)[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\xi- \\ -fm_2[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y\right)+\ldots=0,$$

$$\frac{d^2(\rho x)}{dt^2}-x\frac{d^2\rho}{dt^2}-2\rho\omega\frac{dy}{dt}-f(m_0+m_1+m_2)[F(\rho)-\rho F'(\rho)]x+ \\ +[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left[\frac{3}{4}f(m_1+m_2)x-\frac{\sqrt{3}}{4}f(m_1-m_2)y\right]+\ldots=0.$$

Введем во все эти уравнения новую независимую переменную — угол ϑ — подстановкой (8.65). Тогда, замечая, что вообще

$$\frac{d^2(\rho\zeta)}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{c^2}{\rho^3}\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2},$$

и полагая для сокращения

$$\frac{f(m_0+m_1+m_2)}{c^2}=g, \quad g\rho^3[F(\rho)-\rho F'(\rho)]=u, \tag{8.72}$$

$$\frac{3}{4}\frac{m_1+m_2}{m_0+m_1+m_2}=\mu, \qquad \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{m_1-m_2}{m_0+m_1+m_2}=\mu', \tag{8.72'}$$

мы получим окончательно следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{d\vartheta^2}-2\frac{dy}{d\vartheta}&=u[(1-\mu)x+\mu' y]+\ldots,\\ \frac{d^2y}{d\vartheta^2}+2\frac{dx}{d\vartheta}&=u[\mu' x+\mu y]+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{8.73}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2}-2\eta-u\xi&=\frac{\mu-\sqrt{3}\mu'}{2}u\left(\frac{y}{\sqrt{3}}+x\right)+\ldots,\\ \frac{d\eta}{d\vartheta}+2\frac{d\xi}{d\vartheta}&=\frac{\mu-\sqrt{3}\mu'}{2}u\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-y\right)+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{8.74}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\rho^2\omega_1)}{d\vartheta}+\rho^2\omega_2&=0+\ldots,\\ \frac{d(\rho^2\omega_2)}{d\vartheta}-\rho^2\omega_1&=0+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{8.75}$$

В этих уравнениях u есть известная функция от ϑ или некоторая постоянная. Для случая ньютоновского притяжения мы имеем

$$F(\rho)=\frac{1}{\rho^2}, \quad u=3g\rho. \tag{8.76}$$

Уравнения (8.73), (8.74) и (8.75) годятся также и для случая ограниченной задачи трех тел. В последнем случае нужно только положить $m_2=0$, вследствие чего уравнения (8.74) несколько упрощаются, так как коэффициент при линейных членах этих уравнений обращается в нуль.

3. Рассмотрение вопроса об устойчивости нулевого решения (8.66′) вышенаписанных уравнений зависит прежде всего от решения этой задачи в первом приближении, т. е. от исследования линейных уравнений, которые получаются из уравнений (8.73), (8.74) и (8.75) отбрасыванием в правых частях последних всех членов выше первого порядка.

Из полученных шести линейных уравнений последние два легко интегрируются и дают

$$\left.\begin{aligned}\rho^2\omega_1&=A\sin\vartheta+B\cos\vartheta,\\ \rho^2\omega_2&=-A\cos\vartheta+B\sin\vartheta,\end{aligned}\right\} \tag{8.75'}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Отсюда видно, что ω_1 и ω_2 всегда остаются бесконечно малыми одного порядка со своими начальными значениями, если ρ никогда не обращается в нуль, что мы и будем впредь предполагать.

Таким образом, треугольное лагранжево решение оказывается устойчивым относительно величин ω_1 и ω_2 (по крайней мере в первом приближении!) и плоскость треугольника, образованного тремя точками M_i, всегда остается близкой к плоскости, образованной этими точками в начальный момент времени.

Поэтому остается рассмотреть только четыре уравнения, представляющие первое приближение уравнений (8.53) и (8.54). Эту последнюю задачу Ляпунов приводит весьма искусным приемом к рассмотрению только двух уравнений, образующих систему четвертого порядка.

В самом деле, покажем, следуя Ляпунову, что если известны функции x и y, удовлетворяющие уравнениям первого приближения системы (8.73), то функции ξ, η, удовлетворяющие уравнениям первого приближения системы (8.74), найдутся при помощи квадратур и дифференцирований.

Для этого отметим прежде всего следующее свойство уравнений первого приближения системы (8.73), т. е. уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy}{d\vartheta} &= u[(1-\mu)x + \mu' y], \\ \frac{d^2y}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx}{d\vartheta} &= u(\mu' x + \mu y). \end{aligned}\right\} \tag{8.77}$$

Если сделать в этих уравнениях подстановку

$$x + ay = x_1, \quad y - ax = y_1,$$

где a — какая-либо постоянная, то для определения новых переменных x_1 и y_1 получатся уравнения такого же вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy_1}{d\vartheta} &= u[(1-\mu_1)x_1 + \mu_1' y_1], \\ \frac{d^2y_1}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx_1}{d\vartheta} &= u[\mu_1' x_1 + \mu_1 y_1], \end{aligned}\right\} \tag{8.77'}$$

где

$$\mu_1 = \frac{\mu - 2\mu' a + (1-\mu)a^2}{1+a^2}, \quad \mu_1' = \frac{\mu' + (2\mu - 1)a - \mu' a^2}{1+a^2}.$$

Определим a и новую постоянную b из условия

$$\mu_1' x_1 + \mu_1 y_1 = b\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - y\right), \tag{8.78}$$

что дает для них уравнения

$$\mu_1 + \mu_1' a = -b, \quad \mu_1' - \mu_1 a = \frac{b}{\sqrt{3}}, \tag{8.78'}$$

вследствие которых будем также иметь

$$-\mu_1 x_1 + \mu_1' y_1 = b\left(\frac{y}{\sqrt{3}} + x\right). \tag{8.78''}$$

Из уравнений (8.78′) находим

$$a = \frac{\mu + \mu'\sqrt{3}}{\mu' + (1-\mu)\sqrt{3}}, \quad b = -\frac{\mu - \mu^2 - \mu'^2}{\mu' + (1-\mu)\sqrt{3}}\sqrt{3}.$$

Теперь вследствие (8.77′), (8.78) и (8.78″) уравнения первого приближения системы (8.74) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} - 2\eta - u\xi &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}\left(\frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy_1}{d\vartheta} - ux_1\right), \\ \frac{d\eta}{d\vartheta} + 2\frac{d\xi}{d\vartheta} &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}\left(\frac{d^2y_1}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx_1}{d\vartheta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.79}$$

Из уравнений (8.79) видно, что функции ξ и η определяются формулами

$$\xi = \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}x_1 + \bar{\xi}, \quad \eta = \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}\frac{dy_1}{d\vartheta} + \bar{\eta}, \tag{8.79'}$$

где $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ представляют общее решение системы

$$\frac{d^2\bar{\xi}}{d\vartheta^2} - 2\bar{\eta} - u\bar{\xi} = 0, \quad \frac{d\bar{\eta}}{d\vartheta} + 2\frac{d\bar{\xi}}{d\vartheta} = 0, \tag{8.80}$$

которую можно проинтегрировать в квадратурах.

Для этого исключим из выражения (8.72) для u функцию $F(\rho)$ с помощью равенства (8.64′), что даст следующее выражение:

$$u = 4 + \frac{v'''}{v'}, \tag{8.81}$$

где штрихи обозначают дифференцирования по ϑ и положено $v = \rho^{-2}$.

Исключая теперь из уравнений (8.80) переменную $\bar{\eta}$ и заменяя u выражением (8.81), мы получим

$$v'\bar{\xi}'' - v'''\bar{\xi} = 2C_1 v', \tag{8.82}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Интегрируя равенство (8.82), имеем

$$v'\bar{\xi}' - v''\bar{\xi} = 2C_1 v + C_2, \tag{8.82'}$$

где C_2 — вторая произвольная постоянная.

Интегрируя, наконец, линейное уравнение (8.82′), мы будем иметь общее решение системы (8.80) в виде

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi} &= v'\int \frac{2C_1 v + C_2}{v'^2}\,d\vartheta + C_3 v',\\ \bar{\eta} &= -2\bar{\xi} + C_1,\end{aligned}\right\} \tag{8.83}$$

где C_3 — третья произвольная постоянная.

Таким образом, если x_1 и y_1 известны, то ξ и η найдутся по формулам (8.83) и (8.79′).

Последние, если в них подставить вместо x_1, y_1, a, b их значения и заменить μ, μ' их выражениями (8.72′), примут вид

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{(2m_0 + m_1)\,m_2 x + \sqrt{3}\,m_1 m_2 y}{2\,(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2)} + \bar{\xi},\\ \eta &= -\frac{(2m_0 + m_1)\,m_2 y' - \sqrt{3}\,m_1 m_2 x'}{2\,(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2)} + \bar{\eta}.\end{aligned}\right\} \tag{8.84}$$

Притом, если мы положим здесь $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, то это будет только равносильно предположению, что вместо первоначального невозмущенного лагранжева движения берется для сравнения с возмущенным некоторое другое, тоже лагранжево, в котором постоянные g и h бесконечно мало отличаются от своих прежних значений *).

Возвращаемся теперь к уравнениям (8.77). При помощи приведенной выше подстановки преобразовываем их к виду (8.77′) и, пользуясь неопределенностью параметра a, приводим их к более простому виду. Для этого выберем a так, чтобы было $\mu_1' = 0$, что дает для a уравнение

$$\mu' a^2 - (2\mu - 1)\,a - \mu' = 0.$$

Обозначая соответствующую величину μ_1 через λ, найдем для нее, в силу этого уравнения, следующее выражение:

$$\lambda = \mu - \mu' a.$$

Поэтому для определения λ получим уравнение

$$\lambda^2 - \lambda + \mu - \mu^2 - \mu'^2 = 0,$$

которое вследствие формул (8.72′) приводится к виду

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{4}\,\frac{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2}{(m_0 + m_1 + m_2)^2} = 0. \tag{8.85}$$

---

*) Действительно, при $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, ξ и η определятся уравнениями вида (8.80), если $x_1 = y_1 = 0$. Но тогда также $x = y = 0$, что ввиду (8.66) доказывает сказанное.

Если теперь обозначим величины x_1 и y_1, соответствующие принятому определению a, через X и Y, то будем иметь следующие уравнения:

$$X = x + \frac{\mu - \lambda}{\mu'} y, \quad Y = y - \frac{\mu - \lambda}{\mu'} x, \tag{8.86}$$

$$\left.\begin{aligned} X'' - 2Y' &= (1 - \lambda) uX, \\ Y'' + 2X' &= \lambda uY. \end{aligned}\right\} \tag{8.86'}$$

Таким образом, наша задача об устойчивости приводится к задаче об устойчивости нулевого решения системы (8.86′).

В этих уравнениях λ есть какой-либо из корней уравнения (8.85), которые, как нетрудно убедиться, всегда вещественны и заключаются один между 0 и $\frac{1}{2}$, другой между $\frac{1}{2}$ и 1. Притом этих пределов они могут достигать только в двух случаях: когда масса одной из точек бесконечно велика сравнительно с массами двух остальных или когда массы всех трех точек равны между собой. В первом случае корни уравнения (8.85) суть 0 и 1, во втором оба корня равны $^1/_2$.

4. Уравнения (8.86′) легко интегрируются, когда u — величина постоянная. Общее решение этих уравнений может быть написано в этом случае в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} X &= A_1 \cos(k_1\vartheta + \alpha_1) + A_2 \cos(k_2\vartheta + \alpha_2), \\ Y &= -\frac{k_1^2 + (1 - \lambda) u}{2k_1} A_1 \sin(k_1\vartheta + \alpha_1) - \\ &\qquad - \frac{k_2^2 + (1 - \lambda) u}{2k_2} A_2 \sin(k_2\vartheta + \alpha_2), \end{aligned}\right\} \tag{8.87}$$

где A_1, A_2, α_1, α_2 — произвольные постоянные, а k_1^2 и k_2^2 — корни квадратного относительно k^2 уравнения

$$k^4 - (4 - u) k^2 + \lambda (1 - \lambda) u^2 = 0. \tag{8.88}$$

Кроме того, непосредственное интегрирование уравнений (8.80) дает

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi} &= C_1 + C_2 \cos\left(\sqrt{4 - u}\, \vartheta + \gamma\right), \\ \bar{\eta} &= -2\bar{\xi} + \frac{4 - u}{2} C_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.87'}$$

где C_1, C_2 и γ — произвольные постоянные.

Из формул (8.87′) непосредственно следует, что для устойчивости необходимо условие

$$4 - u > 0, \tag{8.89}$$

а из формул (8.87) видно, что для этого еще необходимо, чтобы оба корня квадратного (относительно k^2) уравнения (8.88) были вещественными, положительными и различными. Поэтому, кроме условия (8.89), имеем еще следующее:

$$\left(\frac{4-u}{u}\right)^2 - 4\lambda(1-\lambda) > 0 \tag{8.90}$$

при добавочном условии, что $\lambda(1-\lambda)u^2$ не есть нуль.

Величина u может быть постоянной в двух случаях: во-первых, для всякой функции $F(\rho)$ (т. е. для всякого закона притяжения, включая, конечно, и закон Ньютона), если рассматриваемое невозмущенное лагранжево движение есть постоянное (ρ и ω постоянны); во-вторых, для всякого лагранжева движения, но при некотором определенном типе функции $F(\rho)$.

В первом случае, когда ρ — постоянная величина, формулы (8.72) и (8.65″) дают

$$u = 1 - \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)},$$

а поэтому условия (8.89) и (8.90), с использованием уравнения (8.85), приводятся к следующему виду:

$$3 + \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} > 0,$$

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2} > 3\left[\frac{1-\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}}{3+\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}}\right]^2. \tag{8.91}$$

При законе $F(\rho) = \rho^{-N}$ эти условия совпадают с условиями Рауса, а для закона Ньютона превращаются в

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2} > 27,$$

откуда при $m_2 = 0$, полагая $\frac{m_1}{m_0+m_1} = \mu$, получим уже известное нам условие устойчивости треугольных точек либрации ограниченной круговой задачи.

Заметим, что первое из них есть условие возможности периодических лагранжевых движений, бесконечно близких к рассматриваемому постоянному.

Во втором случае из условия, что

$$u = g\rho^3[F(\rho) - \rho F'(\rho)] = \text{const} \tag{8.92}$$

для всякого ρ, находим

$$F(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^3} + \beta\rho, \tag{8.92′}$$

где α и β — постоянные.

Нетрудно убедиться, что в этом случае лагранжевы движения будут периодическими, только когда $1 - g\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Неравенство (8.91) в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2} > 3\left(\frac{ga}{1-ga}\right)^2 \tag{8.92''}$$

и представляет условие устойчивости этих периодических движений.

Полезно напомнить еще раз, что все приведенные нами условия устойчивости являются только достаточными условиями устойчивости лагранжева движения по первому приближению и что никаких заключений об устойчивости вообще из этих условий вывести нельзя.

Если u не является постоянной величиной, то исследование вопроса об устойчивости даже в первом приближении делается чрезвычайно сложной и трудной задачей.

Мы будем рассматривать в дальнейшем только тот случай, когда исследуемое невозмущенное лагранжево движение является периодическим, что в случае закона притяжения Ньютона соответствует случаю, когда каждая из трех масс описывает эллиптическую орбиту (с одним и тем же эксцентриситетом) вокруг общего центра масс всей системы.

Вообще будем предполагать, что ρ есть периодическая функция ϑ с периодом Ω, определяемым формулой (8.64″). Для этого необходимо, чтобы величины ρ_0 и ρ_1 (из которых первая не есть нуль, а вторая есть число конечное) были простыми корнями уравнения (8.64*) и чтобы ρ всегда заключалось между пределами ρ_0 и ρ_1.

Условиями устойчивости рассматриваемого невозмущенного периодического движения являются, очевидно, условия, при которых функции ξ, η, x, y остаются конечными для всякого вещественного значения t.

Рассмотрим прежде всего выражения (8.83). Нетрудно убедиться, что функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, определяемые этими формулами, вообще следующего типа:

$$P(\vartheta)+\vartheta Q(\vartheta), \tag{8.93}$$

где $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ — периодические функции от ϑ с периодом Ω. Но из уравнения (8.65) (в котором будем считать для определенности постоянную c положительной) следует, что ϑ есть непрерывная возрастающая функция времени, получающая приращение Ω, когда t получает приращение

$$T=\frac{1}{c}\int\limits_0^{\Omega}\rho^2\,d\vartheta.$$

Поэтому всякая функция типа (8.93) приводится к виду

$$\tilde{P}(t)+t\tilde{Q}(t), \qquad (8.93')$$

где $\tilde{P}(t)$ и $\tilde{Q}(t)$ — периодические функции t с периодом T.

Такого вида будут, следовательно, вообще функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, рассматриваемые как функции t.

Отсюда следует, что если признаком устойчивости считать (как это было принято выше) то обстоятельство, что в возмущенном движении стороны треугольника ($M_0M_1M_2$) должны бесконечно мало отличаться от тех длин, которые им соответствовали бы в невозмущенном движении в тот же момент времени, то периодические лагранжевы движения вообще неустойчивы.

Это обстоятельство, впрочем, очевидно также из следующих соображений.

Когда мы переходим от одного периодического лагранжева движения к другому, то при этом вообще изменяется и период T, а отсюда следует, что если даже постоянные g и h, характеризующие новое движение, отличаются сколь угодно мало от своих прежних значений, то все же разности между одновременными длинами сторон треугольника в обоих движениях не могут оставаться всегда бесконечно малыми. Последнее возможно только при условии, что период T не изменился *).

Ляпунов замечает при этом, что возможно найти такой закон притяжения, для которого действительно период T не зависит от постоянных g и h. Оказывается, что такой закон выражается формулой (8.92'); для него, как было показано выше, функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ всегда содержат только периодические члены. Вдобавок непосредственное вычисление периода T дает в этом случае

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{\beta(m_0+m_1+m_2)}}.$$

Таким образом, период не зависит от произвольных постоянных интегрирования.

§ 5. Исследование устойчивости периодических движений

1. В предыдущем параграфе было показано, что всякое периодическое лагранжево движение вообще неустойчиво относительно величин ξ и η, а следовательно, если в начальный

*) Подобное же обстоятельство было уже отмечено нами в главе II при рассмотрении задачи об устойчивости эллиптического кеплеровского движения. Поэтому в случае кеплеровского движения можно говорить только об его орбитальной устойчивости. Нечто подобное мы имеем и в рассматриваемой задаче трех тел.

момент точки M_i находятся сколь угодно близко от вершин равностороннего треугольника, соответствующего периодическому лагранжеву решению, то в дальнейшем точки M_i не будут всегда оставаться вблизи этих вершин.

Поэтому для случая периодических движений *) задачу об устойчивости Ляпунов ставит несколько иным, более общим образом.

А именно, следуя Ляпунову, мы будем считать периодическое лагранжево движение устойчивым, когда после всяких сколь угодно малых численно начальных возмущений треугольник $(M_0M_1M_2)$ всегда бесконечно мало отличается от равностороннего, причем стороны его изменяются между пределами, бесконечно мало отличающимися от прежних.

Иными словами, будем рассматривать *задачу об орбитальной устойчивости* периодического лагранжева движения, так как при новой постановке вопроса орбиты двух точек M_1 и M_2 относительно M_0 в возмущенном движении будут сколь угодно мало отличаться от орбит этих точек в невозмущенном движении, хотя возмущенные и невозмущенные положения точек (и скорости, разумеется!) вовсе не будут оставаться близкими во всякий момент времени.

Для решения вопроса об устойчивости в этом смысле мы можем сравнивать возмущенное движение не с первоначальным невозмущенным движением, а с каким-либо другим периодическим лагранжевым движением, в котором постоянные g и h имеют значения, бесконечно мало отличающиеся от соответствующих значений в первоначальном невозмущенном движении.

А такая постановка вопроса равносильна предположению, что $\overline{\xi} = \overline{\eta} = 0$, откуда следует, что решение задачи зависит теперь исключительно от задачи об устойчивости нулевого решения системы (8.86′).

Теперь и обращаемся к этим уравнениям

$$\left.\begin{aligned} X'' - 2Y' &= (1-\lambda)uX, \\ Y'' + 2X' &= \lambda uY, \end{aligned}\right\} \tag{8.94}$$

где λ — положительная постоянная, заключающаяся между нулем и единицей, а u — известная периодическая функция ϑ с периодом Ω, который для случая ньютоновского закона притяжения равен просто 2π.

Известно (см. главу I), что решение системы (8.94) и одновременно решение задачи об устойчивости нулевого решения

*) Здесь будет предполагаться, что u — периодическая функция полярного угла ϑ, не приводящаяся к постоянной. В случае ньютоновского закона притяжения эта функция определяется формулой (8.76).

этой системы зависит от нахождения корней соответствующего характеристичного уравнения системы (8.94). Напомним, как составляется это уравнение. Пусть

$$X_i(\vartheta), \quad Y_i(\vartheta) \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{8.95}$$

суть четыре независимые системы частных решений уравнений (8.94). Тогда функции $X_i(\vartheta+\Omega)$, $Y_i(\vartheta+\Omega)$ также образуют систему независимых частных решений, и мы имеем

$$X_i(\vartheta+\Omega)=\sum_{j=1}^{4} A_{ij}X_j(\vartheta), \quad Y_j(\vartheta+\Omega)=\sum_{j=1}^{4} A_{ij}Y_j(\vartheta), \tag{8.95'}$$

где A_{ij} — некоторые постоянные.

Тогда характеристичное уравнение системы (8.94) напишется в виде

$$D(q)=|\,\|A_{ij}\|-qE\,|=0, \tag{8.96}$$

где E — единичная матрица четвертого порядка.

Если уравнение (8.96) привести к виду

$$q^4+A_1q^3+A_2q^2+A_3q+A_4=0, \tag{8.96'}$$

то коэффициенты A_i будут инвариантами относительно группы независимых решений, и если эти инварианты известны, то, по крайней мере, форма общего решения системы (8.94) также известна. Действительно, зная инварианты A_i, мы знаем также корни q_i характеристичного уравнения (эти корни также являются инвариантами), после чего получим общее решение в виде

$$X=\sum_{i=1}^{4} C_iP_i(\vartheta)\,q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y=\sum_{i=1}^{4} C_iQ_i(\vartheta)\,q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \tag{8.97}$$

где $P_i(\vartheta)$ и $Q_i(\vartheta)$ — периодические функции с периодом Ω, а C_i — произвольные постоянные.

Поэтому функции X и Y будут оставаться ограниченными при произвольных начальных условиях и нулевое решение системы (8.94) будет устойчивым, если модули всех корней уравнения (8.96) равны или меньше единицы.

В случае кратных корней получатся еще дополнительные условия, если только они возможны, состоящие в том, чтобы кратный корень обращал в нуль все миноры определителя $D(q)$ до известного порядка.

К сожалению, задача о составлении определителя $D(q)$ настолько трудна, что можно дать способы только для приближенного вычисления его элементов, или инвариантов.

В нашем случае эта задача несколько упрощается благодаря специальному виду системы (8.94), которая легко может быть переписана в канонической форме. Но в части первой этой книги была доказана важная теорема Ляпунова, утверждающая, что характеристичное уравнение канонической системы с периодическими коэффициентами всегда является *возвратным.*

Поэтому уравнение (8.96) (или, что то же, (8.96′)) можно написать следующим образом:

$$D(q) = q^4 - 2Aq^3 + 2Bq^2 - 2Aq + 1 = 0, \tag{8.98}$$

вследствие чего задача приводится к вычислению только двух инвариантов A и B.

Так как каждому корню q уравнения (8.98) соответствует корень $1/q$, то если среди корней этого уравнения имеются такие, модули которых не равны единице, то нулевое решение системы (8.94) будет заведомо *неустойчивым.*

Поэтому необходимым условием для устойчивости этого нулевого решения, а вместе с тем и периодического лагранжева решения в указанном смысле является условие, чтобы модули всех корней уравнения (8.98) были равны единице.

Найдем условия, которым должны удовлетворять для этого коэффициенты A и B.

Пусть все корни уравнения (8.98) имеют модули, равные единице. Представим эти корни в следующей форме:

$$e^{\theta_1 i}, \quad e^{-\theta_1 i}, \quad e^{\theta_2 i}, \quad e^{-\theta_2 i},$$

где e — неперово число, $i = \sqrt{-1}$, а θ_1 и θ_2 — вещественные числа.

На основании теоремы Виета мы имеем

$$A = \cos\theta_1 + \cos\theta_2, \quad B = 1 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2, \tag{8.98′}$$

откуда следует, что $\cos\theta_1$ и $\cos\theta_2$ — корни квадратного уравнения

$$\zeta^2 - A\zeta + \frac{B-1}{2} = 0. \tag{8.99}$$

Условие, что корни этого уравнения вещественны и различны, выражается неравенством

$$A^2 - 2(B-1) > 0, \tag{8.99′}$$

а что они численно меньше единицы — неравенствами

$$\sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 - A, \quad \sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 + A.$$

Отсюда, во-первых, следует, что

$$2 - A > 0, \quad 2 + A > 0$$

или

$$A^2 < 4, \tag{8.99″}$$

и, во-вторых, что

$$B+1>2A>-B-1,$$

откуда

$$B+1>0, \quad A^2<\left(\frac{B+1}{2}\right)^2. \tag{8.99'''}$$

Условия (8.99′), (8.99″) и (8.99‴) равносильны следующим:

$$\left.\begin{aligned} -1<B<3,\\ 2(B-1)<A^2<\left(\frac{B+1}{2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.100}$$

При этих условиях корни уравнения (8.99) вещественны, различны и по числовым значениям меньше единицы, а потому корни уравнения (8.98) различны и имеют модули, равные единице.

В предельных случаях неравенств (8.100) получается следующее.

При $B=3$ должно быть $A^2=4$ и оба корня уравнения (8.99) равны либо $+1$, либо -1, а следовательно, все четыре корня уравнения (8.98) равны также либо $+1$, либо -1.

При $B=-1$ должно быть $A=0$, а поэтому один корень уравнения (8.99) равен $+1$, а другой -1, и, следовательно, два корня уравнения (8.98) равны $+1$, а два остальных равны -1.

При $A^2=\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ один корень уравнения (8.99) равен ±1, а другой представляет вообще правильную дробь. Следовательно, два корня уравнения (8.98) равны ±1, а остальные два вообще отличны от ±1.

При $A^2=2(B-1)$ корни уравнения (8.99) равны, будут вообще отличными от ±1, и следовательно, уравнение (8.98) имеет две пары равных корней, вообще отличных от ±1.

В непредельных случаях условий (8.100) нулевое решение системы (8.94), несомненно, устойчиво, а поэтому невозмущенное лагранжево движение будет устойчиво, по крайней мере в первом приближении.

Предельные случаи требуют еще дополнительных исследований, которых мы касаться не будем.

Вся наша задача приводится теперь к вычислению инвариантов A и B и проверке условий (8.100).

Мы и перейдем теперь к краткому изложению результатов А. М. Ляпунова, относящихся к этой последней задаче.

2. Как уже было отмечено, инварианты A и B могут быть вычислены только каким-нибудь приближенным способом. Например, для приближенного вычисления инвариантов мы можем воспользоваться общей теоремой Ляпунова, рассмотренной в главе I, согласно которой всякие функции, удовлетворяющие предложенной системе линейных уравнений с периодическими коэффициентами, а также коэффициенты характеристичного уравнения суть голоморфные функции параметров, от которых зависят (голоморфным образом) коэффициенты системы.

Из этой теоремы вытекают для интересующей нас системы (8.94) два способа приближенного вычисления инвариантов A и B. Одним из этих способов можно пользоваться всегда, хотя практически он может быть полезен только в том случае, когда масса одной из точек весьма велика по сравнению с массами двух остальных: другим — когда рассматриваемое невозмущенное периодическое движение достаточно близко к постоянному. Для случая ньютонова закона притяжения, который нас главным образом интересует, второй способ дает, следовательно, возможность решить задачу об устойчивости, когда эксцентриситет орбит точек в лагранжевом движении достаточно близок к нулю.

Мы рассмотрим принципиальную сторону применения этих способов, не воспроизводя всех длинных и громоздких выкладок, с ними связанных, которые в мемуаре Ляпунова подробно выполнены.

В первом способе мы можем принять за параметр, входящий голоморфным образом в периодические коэффициенты исследуемых уравнений, постоянную λ, относительно которой коэффициенты системы (8.94) голоморфны при всех вещественных ее значениях.

Поэтому на основании упомянутой теоремы мы можем утверждать, что функции X и Y, удовлетворяющие системе (8.94), и инварианты A и B могут быть представлены рядами, расположенными по целым положительным степеням λ и абсолютно сходящимися для всякого значения λ. Положим поэтому

$$X=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n P_n(\vartheta),\quad Y=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n Q_n(\vartheta), \tag{8.101}$$

где P_n и Q_n — неопределенные коэффициенты.

Требуя, чтобы ряды (8.101) удовлетворяли уравнениям (8.94), мы получим для нахождения коэффициентов этих рядов следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_0''-2Q_0'-uP_0&=0,\\ Q_0''+2P_0'\qquad&=0,\end{aligned}\right\} \tag{8.102}$$

и для $n>0$:

$$\left.\begin{aligned} P_n''-2Q_n'-uP_n&=-uP_{n-1},\\ Q_n''+2P_n'\qquad&=\quad uQ_{n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{8.102'}$$

Но уравнения (8.102) имеют такой же вид, как и уравнения (8.80), и следовательно, интегрируются в квадратурах.

Поэтому и все функции P_n, Q_n $(n > 0)$ могут быть определены последовательно, в порядке возрастания n, путем квадратур. Произвольные постоянные, возникающие при интегрировании каждой из систем (8.102′), будем определять таким образом, чтобы

$$P_n(0) = P_n'(0) = Q_n(0) = Q_n'(0) = 0. \tag{8.103}$$

Постоянные же, введенные интегрированием системы (8.102), можно определить так, чтобы

$$P_0(0) = X_0, \quad P_0'(0) = X_0', \quad Q_0(0) = Y_0, \quad Q_0'(0) = Y_0', \tag{8.103′}$$

где X_0, Y_0, X_0', Y_0' — заданные начальные значения функций X, Y и их первых производных, соответствующие $\vartheta = 0$.

Тогда формулы, определяющие функции P_0 и Q_0, можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} P_0(\vartheta) &= X_0 + X_0' \frac{v'}{v_0''} + v' \int_0^\vartheta \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'') X_0}{v'^2}\, d\vartheta, \\ Q_0(\vartheta) &= Y_0 + C_1\vartheta - 2\int_0^\vartheta P_0\, d\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{8.104}$$

где

$$v, \ v', \ v'', \ v_0, \ v_0'', \quad C_1 = 2X_0 + Y_0' \tag{8.104′}$$

суть известные функции ϑ и известные постоянные.

Далее, для $n > 0$ имеем следующие формулы:

$$P_n(\vartheta) = v' \int_0^\vartheta \frac{S_n\, d\vartheta}{v'^2}, \qquad Q_n(\vartheta) = \int_0^\vartheta R_n\, d\vartheta - 2\int_0^\vartheta P_n\, d\vartheta, \tag{8.105}$$

где положено для краткости

$$R_n = \int_0^\vartheta u Q_{n-1}\, d\vartheta, \qquad S_n = \int_0^\vartheta (2R_n - uP_{n-1})\, v'\, d\vartheta. \tag{8.105′}$$

Из формул (8.104) и (8.105) выводятся формулы для определения постоянных $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$, $Q_n(\Omega)$, $Q_n'(\Omega)$, которые необходимы для вычисления элементов матрицы $\| A_{ij} \|$, а следовательно, для вычисления инвариантов A и B.

Окончательные формулы для этих постоянных имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(\Omega)=X_0,\\
&P_0'(\Omega)=X_0v_0''\int_0^\Omega \frac{4(v-v_0)+v''-v_0''}{v'^2}\,d\vartheta+\\
&\qquad\qquad\qquad+X_0'+2Y_0'v_0''\int_0^\Omega \frac{(v-v_0)\,d\vartheta}{v'^2},\\
&Q_0(\Omega)=2X_0\int_0^\Omega \frac{(v-v_0)\left[4(v-v_0)+v''-v_0''\right]d\vartheta}{v'^2}+\\
&\qquad\qquad\qquad+Y_0+Y_0'\left\{\Omega+4\int_0^\Omega \frac{(v-v_0)^2\,d\vartheta}{v'^2}\right\},
\end{aligned}\right\}\qquad(8.106)$$

$$\left.\begin{aligned}
&Q_0'(\Omega)=Y_0',\\
&P_n(\Omega)=-\frac{1}{v_0''}\int_0^\Omega (2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,\\
&P_n'(\Omega)=\int_0^\Omega (2R_n-uP_{n-1})(1+V_1v')\,d\vartheta-\\
&\qquad\qquad\qquad-V_1(\Omega)\int_0^\Omega (2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,\\
&Q_n(\Omega)=\int_0^\Omega R_n\,d\vartheta-2\int_0^\Omega (2R_n-uP_{n-1})\,Vv'\,d\vartheta+\\
&\qquad\qquad\qquad+2V(\Omega)\int_0^\Omega (2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,\\
&Q_n'(\Omega)=R_n(\Omega)+\frac{2}{v_0''}\int_0^\Omega (2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,
\end{aligned}\right\}\qquad(8.106')$$

где положено вдобавок для краткости

$$V(\vartheta)=\int_0^\vartheta \frac{(v-v_0)\,d\vartheta}{v'^2},\qquad V_1(\vartheta)=\int_0^\vartheta \frac{(v''-v_0'')\,d\vartheta}{v'^2}.\qquad(8.106'')$$

Когда все постоянные (8.106) и (8.106′), которые будут линейными однородными функциями X_0, X_0', Y_0, Y_0', найдены, инварианты A и B определятся следующим образом. Пусть

$$\left.\begin{aligned} P_n(\Omega) &= (a, a)_n X_0 + (a, a')_n X_0' + (a, b)_n Y_0 + (a, b')_n Y_0', \\ P_n'(\Omega) &= (a', a)_n X_0 + (a', a')_n X_0' + (a', b)_n Y_0 + (a', b')_n Y_0', \\ Q_n(\Omega) &= (b, a)_n X_0 + (b, a')_n X_0' + (b, b)_n Y_0 + (b, b')_n Y_0', \\ Q_n'(\Omega) &= (b', a)_n X_0 + (b', a')_n X_0' + (b', b)_n Y_0 + (b', b')_n Y_0', \end{aligned}\right\} \tag{8.107}$$

где все коэффициенты $(a, a)_n$, $(a, a')_n$, ... — известные постоянные.

Тогда инварианты A_{ij} характеристичного уравнения, соответствующего периоду Ω, представятся рядами вида

$$A_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} (a, a)_n \lambda^n, \quad A_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} (a', a)_n \lambda^n, \ \ldots, \ A_{44} = \sum_{n=0}^{\infty} (b', b')_n \lambda^n,$$

а развертывая определитель $D(q)$, получим также инварианты A и B в виде рядов такого же вида.

Предыдущие формулы могут служить для решения вопроса об устойчивости при достаточно малых значениях λ, для чего достаточно составить только немногие первые члены разложений A и B по степеням λ *).

Покажем, как получить такие формулы. Из формул (8.106) имеем

$$(a, a)_0 = (a', a')_0 = (b, b)_0 = (b', b')_0 = 1,$$

вследствие чего характеристичное уравнение (8.96′) может быть представлено в виде

$$(1-q)^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \{K_n(1-q)^3 + L_n(1-q)^2 + M_n(1-q) + N_n\} \lambda^n = 0, \tag{8.108}$$

где K_n, L_n, M_n, N_n — величины, не зависящие ни от q, ни от λ.

Но уравнение (8.108) должно приводиться к виду (8.98), вследствие чего между четырьмя величинами K_n, L_n, M_n, N_n должно существовать два соотношения

$$K_n + L_n = -\frac{M_n}{2} = N_n, \tag{8.108′}$$

так что для каждого значения n достаточно вычислить только две величины K_n и N_n.

---

*) Заметим, что при $\lambda = 0$ уравнения (8.94) приводятся к виду (8.80), откуда следует, что в этом случае имеем неустойчивость. Но это не исключает возможности устойчивости для достаточно малых значений λ, так как при $\lambda = 0$ все четыре корня характеристичного уравнения равны единице.

Нетрудно видеть, что первая определяется формулой

$$K_n = (a, a)_n + (a', a')_n + (b, b)_n + (b', b')_n. \tag{8.109}$$

Что же касается второй, то, замечая, что из (8.106′) следует

$$(a, a')_0 = 0, \quad (a, b)_0 = 0, \quad (a, b')_0 = 0, \quad (a', b)_0 = 0,$$
$$(b, a')_0 = 0, \quad (b', a)_0 = 0, \quad (b', a')_0 = 0, \quad (b', b)_0 = 0,$$

получаем для определения ее тождественное относительно λ равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n \lambda^n = \| A_{ij}(\lambda) \| - \| A_{ij}(0) \|. \tag{8.110}$$

Из этого равенства находим $N_1 = 0$,

$$N_2 = \begin{vmatrix} (a', a)_0, & (b, a)_0 \\ (a', b')_0, & (b, b')_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a, a')_1, & (a, b)_1 \\ (b', a')_1, & (b', b)_1 \end{vmatrix} \tag{8.110′}$$

и так далее.

Теперь, имея в виду (8.108′), находим для инвариантов A и B следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \lambda^n, \\ B &= 3 + K_1 \lambda + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (2K_n + N_n) \lambda^n. \end{aligned}\right\} \tag{8.111}$$

Вследствие этого условия устойчивости (8.100) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} -4 < K_1 \lambda + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (2K_n + N_n) \lambda^n < 0, \\ N_2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{4} K_1 N_2 + N_3\right) \lambda^3 + \ldots > 0, \\ \left(\frac{1}{4} K_1^2 - N_2\right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{2} K_1 K_2 - N_3\right) \lambda^3 + \ldots > 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.112}$$

где невыписанные члены содержат степени λ выше третьей.

Отсюда видно, что условиями устойчивости периодических лагранжевых движений при достаточно малых значениях λ вообще служат неравенства

$$K_1 < 0, \quad 0 < N_2 < \frac{1}{4} K_1^2. \tag{8.112′}$$

Если же $N_2 = 0$, то условия устойчивости имеют вид

$$K_1 < 0, \quad N_3 > 0. \tag{8.112″}$$

Заметим, что $\lambda = 0$, когда $m_0 = \infty$. Поэтому достаточно малые значения λ мы будем получать, когда масса m_0 достаточно велика по сравнению с массами m_1 и m_2. Это обстоятельство и имеет обычно место в астрономических задачах.

Если применить приведенные формулы для случая закона Ньютона, когда невозмущенное движение является эллиптическим, то в результате получим следующие выражения величин, входящих в условия устойчивости:

$$N_2 = 0, \tag{8.113}$$

$$K_1 = -\frac{36\pi^2 (1+e^2)}{(1-e^2)^{5/2}} < 0, \tag{8.113$'$}$$

$$N_3 = \left[\frac{36\pi^2}{e^2(1-e^2)}\left(\frac{1+e^2}{\sqrt{1-e^2}} - 1\right)\right]^2 > 0. \tag{8.113$''$}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае выполняются условия (8.112′) и мы приходим к следующему результату:

В случае притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния, всякое периодическое лагранжево движение устойчиво, если масса одной из точек достаточно велика по сравнению с массами двух остальных.

3. В заключение рассмотрим вкратце, как решается задача об устойчивости, когда невозмущенное движение достаточно близко к постоянному лагранжеву движению. При этом будем предполагать, что тела, движения которых нас интересуют, притягиваются по закону Ньютона. Тогда функция u в уравнениях (8.94) определяется формулой

$$u = 3g\rho, \tag{8.114}$$

где

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}, \tag{8.114$'$}$$

причем a есть большая полуось эллиптической орбиты, которую описывает каждая из масс m_1 и m_2 вокруг массы m_0.

Как известно, ρ может быть представлено в виде ряда, расположенного по степеням эксцентриситета орбиты e, абсолютно сходящегося при всех действительных значениях ϑ, пока $0 \leqslant e < \bar{e} = 0{,}6627\ldots$

Отсюда следует на основании теоремы Ляпунова, которой мы уже пользовались в предыдущем разделе по отношению к параметру λ, что функции X, Y, удовлетворяющие уравнениям (8.94), а также инварианты A и B характеристичного уравнения также могут быть представлены в виде рядов, расположенных по степеням эксцентриситета e, абсолютно сходящихся при $e < \bar{e}$.

Таким образом, будем иметь

$$X=\sum_{n=0}^{\infty} e^n X_n(\vartheta), \qquad Y=\sum_{n=0}^{\infty} e^n Y_n(\vartheta) \tag{8.115}$$

и подобным же образом

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} e^n A_n, \qquad B=\sum_{n=0}^{\infty} e^n B_n. \tag{8.116}$$

Для нахождения решения (8.115) нужно проделать вычисления, совершенно аналогичные тем, которые были необходимы в предыдущем разделе, а затем таким же образом, как и ранее, составить характеристичное уравнение и вывести условия устойчивости. Все эти вычисления и выкладки проделаны в мемуаре Ляпунова для общего случая, когда закон притяжения остается произвольным, а затем из полученных условий выведены условия для интересующего нас случая.

Но если рассматривать только ньютонов закон притяжения, как мы и предполагаем, то общие выкладки Ляпунова оказываются здесь ненужными и окончательный результат можно получить совершенно элементарным путем.

Действительно, положим сначала $e=0$, т. е. рассмотрим постоянное (круговое) лагранжево движение.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \rho &= a, \\ u &= 3ga = \text{const}, \end{aligned}\right\} \tag{8.117}$$

и общее решение уравнений (8.94) дается формулами (8.87), в которых k_1 и k_2 определяются из биквадратного уравнения (8.88).

Рассматривая круговое движение как периодическое с периодом 2π, мы можем определить соответствующие ему инварианты A_0 и B_0 из формул (8.78′), где, по свойствам характеристических показателей, нужно положить $\theta_1=2\pi k_1$, $\theta_2=2\pi k_2$. Тогда найдем

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \cos 2\pi k_1 + \cos 2\pi k_2, \\ B_0 &= 1 + 2\cos 2\pi k_1 \cos 2\pi k_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.118}$$

Выше было показано, что круговое лагранжево движение будет устойчивым, если выполняется условие

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2} > 27, \tag{8.119}$$

и в этом случае k_1^2 и k_2^2 вещественны, различны и положительны.

Тогда из самого факта устойчивости при условии (8.119) или непосредственно из формул (8.118) найдем, что инварианты A_0 и B_0 удовлетворяют условиям (8.110).

Но A_0 и B_0 — значения инвариантов A и B при $e = 0$. Поэтому при $e = 0$ условия устойчивости (8.110) выполняются.

Но так как A и B — непрерывные функции эксцентриситета орбиты (8.114′), то условия (8.110), выполняясь при $e = 0$, будут, по непрерывности, выполняться и при значениях эксцентриситета, не равных нулю, но достаточно малых.

Поэтому можем утверждать, что

Если массы трех тел удовлетворяют условию (8.119), *то при законе притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния, всякое лагранжево периодическое движение, достаточно близкое к постоянному, остается устойчивым.*

Примечание. Полезно еще раз напомнить, что в случае периодических лагранжевых движений имеется в виду орбитальная устойчивость в определенном выше смысле и что задача об устойчивости рассмотрена только в первом приближении.

Глава IX

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ НЕИЗМЕНЯЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

До сих пор мы рассматривали задачи о движении систем материальных точек, подразумевая под этим либо движения тел весьма малых размеров, либо тел, находящихся на весьма больших расстояниях друг от друга. Мы знаем также что однородные шары либо шары, обладающие сферической структурой, элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона, ведут себя так же, как материальные точки, и притягиваются взаимно с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Но несферические тела взаимодействуют друг с другом, как это показывается в теории притяжения, по законам более сложным, даже в том случае, когда их элементарные частицы подчиняются закону Ньютона.

В этом случае силы притяжения вызывают также вращательные моменты, так что общее движение каждого из притягивающихся тел складывается из их поступательных движений, т. е. движений их центров масс, и из вращательных движений тел вокруг центров масс.

Так обстоит дело с неизменяемыми телами или системами, к которым относятся, например, абсолютно твердые тела или системы тел, а также системы материальных точек, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга.

В настоящее время задача о поступательно-вращательном движении твердых тел (или тел, которые могут быть рассматриваемы как абсолютно твердые) играет значительную роль в современной небесной механике, особенно в том ее разделе, который посвящен изучению движений искусственных небесных тел.

Поэтому включение основных положений теории движения твердых тел в нашу книгу вполне оправдано и даже необходимо.

При этом мы не будем ограничиваться рассмотрением случаев задач, основой которых является закон Ньютона. Мы будем рассматривать, так же как и в других частях этой книги, законы сил более общие, для которых закон Ньютона является одним из частных случаев.

Заметим еще, что для естественных (или искусственных) тел природы абсолютное твердое тело является также только моделью, представляющей собой следующий шаг на пути приближения к действительности. Следующим за этим шагом являлось бы рассмотрение нетвердых тел, например, идеально жидких, но построение такой теории пока еще далеко от осуществления и мы ее затрагивать вовсе не будем.

§ 1. Постановка задачи. Общие уравнения движения

1. Пусть нам задана система, состоящая из конечного числа абсолютно твердых тел $T_0, T_1, \ldots, T_n$, каждое из которых имеет определенную, заданную структуру, неизменную форму и постоянную конечную массу m_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Каждое из этих тел может быть трехмерным, двумерным (материальная поверхность или простой слой) или одномерным (материальная линия; например, материальный отрезок прямой или материальная окружность).

Предположим, что каждая элементарная частица dm_i тела T_i, сосредоточенная в точке M_i, находится под действием силы, источником которой является элементарная частица dm_j тела T_j, сосредоточенная в точке M_j $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i)$. Далее, будем предполагать, что эта сила всегда направлена по прямой, проходящей через точки M_i и M_j и пропорциональна произведению масс частиц $dm_i dm_j$ и некоторой функции F_{ij} от времени t, взаимного расстояния $\Delta_{ij} = \overline{M_i M_j}$, а также вообще от двух первых его производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$. Постоянный, или зависящий от времени, множитель пропорциональности мы включим для упрощения в функцию, определяющую закон силы.

Частным случаем сил такого рода является, например, сила притяжения или отталкивания по закону Ньютона, когда

$$F_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}^2}.$$

Другим примером может служить закон Вебера, уже неоднократно нами упоминавшийся, когда

$$F_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}^2}\left[1 - \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} + \frac{2\Delta_{ij}\ddot{\Delta}_{ij}}{\sigma_{ij}^2}\right].$$

Во всех случаях мы, вообще говоря, будем допускать, что третья аксиома ньютоновской механики может и не иметь места, т. е. что вообще

$$F_{ji} \neq F_{ij},$$

так что сила, с которой частица M_j действует на частицу M_i, вообще не равна силе, с которой частица M_i действует на M_j.

2. Уравнения движения системы твердых тел составляются совершенно так же, как это было сделано в первой нашей книге «Небесная механика. Основные задачи и методы» (изд. 3-е, 1975), где принималось, что силы, действующие между всякими двумя частицами, определяются только законом Ньютона.

Выберем каким-либо образом декартову систему координат с началом в фиксированной точке O и с неизменными направлениями осей. Пусть ξ_i', η_i', ζ_i' обозначают абсолютные координаты точки M_i тела T_i в этой системе координат.

Тогда расстояние $\overline{M_iM_j}$ определится известной формулой

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_j' - \xi_i')^2 + (\eta_j' - \eta_i')^2 + (\zeta_j' - \zeta_i')^2. \tag{9.1}$$

Проекции на оси $(O\xi)$, $(O\eta)$, $(O\zeta)$ силы, действующей на точку M_i со стороны точки M_j, будут соответственно

$$F_{ij}\frac{\xi_j' - \xi_i'}{\Delta_{ij}}\,dm_i\,dm_j, \quad F_{ij}\frac{\eta_j' - \eta_i'}{\Delta_{ij}}\,dm_i\,dm_j, \quad F_{ij}\frac{\zeta_j' - \zeta_i'}{\Delta_{ij}}\,dm_i\,dm_j.$$

Выберем далее для каждого тела T_i некоторую точку G_i, неизменно связанную с телом (но не обязательно принадлежащую ему), координаты которой обозначим через ξ_i, η_i, ζ_i. Эту точку будем называть «центром приведения» для тела T_i. В частности, за точку G_i можно принять центр масс (или центр инерции) тела T_i, определяемый известными формулами

$$\xi_i = \frac{1}{m_i}\int\limits_{(T_i)} \xi_i'\,dm_i, \quad \eta_i = \frac{1}{m_i}\int\limits_{(T_i)} \eta_i'\,dm_i, \quad \zeta_i = \frac{1}{m_i}\int\limits_{(T_i)} \zeta_i'\,dm_i. \tag{9.2}$$

Если, например, тело T_i есть шар или шаровой слой, то за точку G_i удобнее всего взять центр шара (шарового слоя). Если шар или слой однороден или обладает сферической структурой, то точка G_i в этом случае будет также и центром масс тела T_i. Но если шар неоднороден и структура его не обладает сферической симметрией, то центр шара не будет его центром масс и точка G_i будет только одним из возможных центров приведения.

Проекции момента силы, приложенной к точке M_i, относительно центра приведения G_i на оси абсолютной системы координат, будут соответственно

$$F_{ij}\times\frac{(\eta_i' - \eta_i)(\zeta_j' - \zeta_i') - (\zeta_i' - \zeta_i)(\eta_j' - \eta_i')}{\Delta_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

$$F_{ij}\times\frac{(\zeta_i' - \zeta_i)(\xi_j' - \xi_i') - (\xi_i' - \xi_i)(\zeta_j' - \zeta_i')}{\Delta_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

$$F_{ij}\times\frac{(\xi_i' - \xi_i)(\eta_j' - \eta_i') - (\eta_i' - \eta_i)(\xi_j' - \xi_i')}{\Delta_{ij}}\,dm_i\,dm_j.$$

Теперь можем составить проекции равнодействующей всех сил, действующих на частицы тела T_i, приложенной к центру приведения G_i. Эти проекции определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} \Xi_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} F_{ij} \frac{\xi'_j - \xi'_i}{\Delta_{ij}} dm_j, \\ \mathrm{H}_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} F_{ij} \frac{\eta'_j - \eta'_i}{\Delta_{ij}} dm_j, \\ \mathrm{Z}_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} F_{ij} \frac{\zeta'_j - \zeta'_i}{\Delta_{ij}} dm_j, \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

где каждый интеграл распространен на всю массу тела T_i и всю массу тела T_j. Если T_i и T_j — тела объемные, то каждый интеграл в (9.3) есть шестикратный. Если каждое тело есть материальная линия, то каждый интеграл в (9.3) — двукратный. Таким образом, каждый из этих интегралов может иметь, в зависимости от рода тел T_i и T_j, любую кратность, не меньшую 2 и не большую 6.

Формулы (9.3) определяют силу, приложенную к точке G_i тела T_i, вызванную присутствием тела T_j. Поэтому, чтобы получить равнодействующую всех сил, действующих на тело T_i от всех других n тел, нужно выражения (9.3) просуммировать по индексу j, что дает проекции полной силы, действующей на тело T_i, приложенной к G_i:

$$\Xi_i = \sum_{j=0}^{n} \Xi_{ij}, \quad \mathrm{H}_i = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{H}_{ij}, \quad \mathrm{Z}_i = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Z}_{ij}. \tag{9.3'}$$

Проекции момента силы (9.3), действующей на T_i, относительно центра приведения G_i даются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} L_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} F_{ij} \frac{(\eta'_i - \eta_i)(\zeta'_j - \zeta'_i) - (\zeta'_i - \zeta_i)(\eta'_j - \eta'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i\, dm_j, \\ M_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} F_{ij} \frac{(\zeta'_i - \zeta_i)(\xi'_j - \xi'_i) - (\xi'_i - \xi_i)(\zeta'_j - \zeta'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i\, dm_j, \\ N_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} F_{ij} \frac{(\xi'_i - \xi_i)(\eta'_j - \eta'_i) - (\eta'_i - \eta_i)(\xi'_j - \xi'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i\, dm_j, \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

а проекции момента равнодействующей всех сил (9.3′) относительно центра приведения тела T_i будут соответственно

$$L_i = \sum_{j=0}^{n} L_{ij}, \quad M_i = \sum_{j=0}^{n} M_{ij}, \quad N_i = \sum_{j=0}^{n} N_{ij}. \tag{9.4′}$$

Все интегралы в формулах (9.3) и (9.4) являются функциями от координат точек G_i, G_j, а также от их производных первого и второго порядка. Эти интегралы могут также содержать явно время t, если последнее входит в законы сил.

3. Введем теперь для каждого тела T_i «собственную систему координат» $(G_i x_i' y_i' z_i')$ с началом в центре приведения G_i и с осями, неизменно связанными с телом T_i.

Тогда абсолютные координаты любой точки M_i тела T_i выражаются через координаты x_i', y_i' и z_i' той же точки в собственной системе координат следующими очевидными формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi_i' &= \xi_i + a_{11}^{(i)} x_i' + a_{12}^{(i)} y_i' + a_{13}^{(i)} z_i', \\ \eta_i' &= \eta_i + a_{21}^{(i)} x_i' + a_{22}^{(i)} y_i' + a_{23}^{(i)} z_i', \\ \zeta_i' &= \zeta_i + a_{31}^{(i)} x_i' + a_{32}^{(i)} y_i' + a_{33}^{(i)} z_i', \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

где $a_{sk}^{(i)}$ — направляющие косинусы, определяющие ориентацию собственной системы координат тела T_i, а следовательно, и самого тела T_i, относительно абсолютной системы по следующей схеме:

	x_i'	y_i'	z_i'
ξ	$a_{11}^{(i)}$	$a_{12}^{(i)}$	$a_{13}^{(i)}$
η	$a_{21}^{(i)}$	$a_{22}^{(i)}$	$a_{23}^{(i)}$
ζ	$a_{31}^{(i)}$	$a_{32}^{(i)}$	$a_{33}^{(i)}$

(9.5′)

Эти девять направляющих косинусов (для каждого тела T_i) выражаются, как известно, через три независимых угла, за которые мы примем здесь опять углы Эйлера: угол прецессии ψ_i, угол нутации ϑ_i и угол собственного вращения φ_i.

Тогда мы имеем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}^{(i)} &= \cos\psi_i\cos\varphi_i - \sin\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i,\\
a_{21}^{(i)} &= \sin\psi_i\cos\varphi_i + \cos\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i,\\
a_{31}^{(i)} &= \sin\varphi_i\sin\vartheta_i,\\
a_{12}^{(i)} &= -\cos\psi_i\sin\varphi_i - \sin\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i,\\
a_{22}^{(i)} &= -\sin\psi_i\sin\varphi_i + \cos\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i,\\
a_{32}^{(i)} &= \cos\varphi_i\sin\vartheta_i,\\
a_{13}^{(i)} &= \sin\psi_i\sin\vartheta_i,\\
a_{23}^{(i)} &= -\cos\psi_i\sin\vartheta_i,\\
a_{33}^{(i)} &= \cos\vartheta_i.
\end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

В выражения, стоящие под знаками кратных интегралов в формулах (9.3) и (9.4), координаты центров приведения G_i и G_j и эйлеровы углы двух собственных систем координат $(G_ix_i'y_i'z_i')$ и $(G_jx_j'y_j'z_j')$ входят непосредственно и через взаимные расстояния по формулам (9.1), (9.5) и (9.6).

Кроме того, так как функции F_{ij} вообще могут зависеть от времени и от производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$, то подынтегральные выражения будут также содержать первые и вторые производные от координат и эйлеровых углов обоих тел.

Таким образом, каждый интеграл в (9.3) и (9.4) является функцией 37 параметров, которые при вычислении интегралов рассматриваются как величины постоянные. Надо также иметь в виду, что указанные интегралы зависят еще от характеристических постоянных, определяющих формы тел и их внутренние строения.

Такими характеристическими постоянными являются массы тел, координаты точек G_i и G_j, моменты инерции различных порядков и геометрические характеристики внешних поверхностей.

Координаты «текущих» точек M_i и M_j являются переменными интегрирования, и если тело T имеет три измерения, то для него координаты x', y', z' являются независимыми. Если же тело T есть материальная поверхность или материальная линия, то координаты точки M связаны одним, соответственно двумя уравнениями и могут быть выражены через две независимые поверхностные координаты или через одну независимую линейную.

Обозначим теперь через P_i, Q_i, R_i проекции момента равнодействующей всех сил, действующих на тело T_i, на собственные оси этого тела, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned} P_i &= L_i a_{11}^{(i)} + M_i a_{21}^{(i)} + N_i a_{31}^{(i)}, \\ Q_i &= L_i a_{12}^{(i)} + M_i a_{22}^{(i)} + N_i a_{32}^{(i)}, \\ R_i &= L_i a_{13}^{(i)} + M_i a_{23}^{(i)} + N_i a_{33}^{(i)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

Эти величины, так же как и величины (9.3), являются функциями времени и 18 величин, изменяющихся с течением времени при поступательно-вращательном движении тела T_i.

4. Обозначим теперь через p_i, q_i, r_i проекции угловой скорости тела T_i на оси собственной для него системы координат и через A_i, B_i, C_i — моменты инерции этого тела относительно его собственных осей.

Тогда уравнения движения всей системы $n+1$ тел напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \Xi_i, \\ m_i\ddot{\eta}_i &= \mathrm{H}_i, \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= \mathrm{Z}_i, \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot{p}_i - (B_i - C_i)\, q_i r_i &= P_i, \\ B_i\dot{q}_i - (C_i - A_i)\, r_i p_i &= Q_i, \\ C_i\dot{r}_i - (A_i - B_i)\, p_i q_i &= R_i. \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

К этим уравнениям нужно еще присоединить кинематические уравнения Эйлера, выражающие p_i, q_i, r_i через углы Эйлера и их первые производные:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \dot{\psi}_i \sin\varphi_i \sin\vartheta_i + \dot{\vartheta}_i \cos\varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \cos\varphi_i \sin\vartheta_i - \dot{\vartheta}_i \sin\varphi_i, \\ r_i &= \dot{\psi}_i \cos\vartheta_i + \dot{\varphi}_i \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Уравнения (9.8)—(9.10) образуют полную систему $6(n+1)$ уравнений второго порядка с таким же числом неизвестных. Этими неизвестными являются координаты центров приведений и эйлеровы углы $n+1$ тел. Но уравнения вообще не разрешены относительно вторых производных от этих неизвестных функций, а поэтому определение всех $6(n+1)$ неизвестных как функций времени и надлежащего числа произвольных постоянных, число которых должно быть равно общему порядку системы, т. е. $12(n+1)$, представляет аналитически неразрешимую задачу.

Если функции F_{ij} не зависят от вторых производных взаимных расстояний, то вторые производные от координат и эйлеровых углов не будут входить в правые части уравнений (9.8) и (9.9) и система всех уравнений легко разрешима относительно вторых производных.

Простейший случай представится тогда, когда функции F_{ij} зависят только от взаимных расстояний, как это имеет место, например, когда система управляется одним законом Ньютона.

Тогда уравнения поступательно-вращательного движения нашей системы $n+1$ абсолютно твердых тел приводятся к виду

$$\left.\begin{array}{lll} m_i\ddot{\xi}_i = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i}, & m_i\ddot{\eta}_i = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i}, & m_i\ddot{\zeta}_i = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \\ \ddot{\psi}_i = \Psi_i, & \ddot{\varphi}_i = \Phi_i, & \ddot{\vartheta}_i = \Theta_i, \end{array}\right\} \tag{9.11}$$

где U — общая силовая функция всей системы, определяемая формулой

$$U = \sum_{i<j} U_{ij}, \tag{9.12}$$

а U_{ij} есть силовая функция двух тел, T_i и T_j, элементарные частицы которых взаимодействуют по закону, определяемому функцией F_{ij}, зависящей только от взаимного расстояния между частицами Δ_{ij}. Таким образом, имеем

$$U_{ij} = \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} dm_i\, dm_j \int F_{ij}(\Delta_{ij})\, d\Delta_{ij}. \tag{9.12$'$}$$

Действительно, легко проверить, что в этом случае мы имеем

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \mathrm{H}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \mathrm{Z}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \tag{9.13}$$

а проекции равнодействующей момента сил, приложенного к центру приведения G_i, найдутся по формулам

$$\left.\begin{aligned} P_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos\vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right)\frac{\sin\varphi_i}{\sin\vartheta_i} + \cos\varphi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}, \\ Q_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos\vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right)\frac{\cos\varphi_i}{\sin\vartheta_i} - \sin\varphi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}, \\ R_i &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}. \end{aligned}\right\} \tag{9.13$'$}$$

Если правые части уравнений (9.9) заменить выражениями (9.13′), воспользоваться затем уравнениями (9.10) и, наконец, разрешить полученные равенства относительно вторых производных от углов Эйлера, то мы получим вторую строчку уравнений (9.11) и вместе с тем выражения их правых частей Ψ_i,

Φ_i, Θ_i через координаты точек G_i, эйлеровы углы и их первые производные.

Эти формулы мы здесь приводить не будем. Они имеют совершенно такой же вид, как и формулы, приведенные на стр. 391 3-го издания первой нашей книги «Небесная механика. Основные задачи и методы» (1975).

Там только закон взаимодействия определялся законом Ньютона, общим для всей системы, определяемым силовой функцией каждой пары тел

$$U_{ij} = f \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \frac{dm_i\, dm_j}{\Delta_{ij}}.$$

В рассматриваемом здесь случае функции F_{ij} не обязательно одинаковы, а поэтому и силовые функции (9.12′) являются аналитически более сложными.

5. Уравнения поступательно-вращательного движения в самом общем случае настолько аналитически сложны, что их решение возможно только приближенными методами или путем численных интегрирований, также в этом случае сложных.

Поэтому полезно отметить по крайней мере один случай, когда эти уравнения настолько упрощаются, что иногда их возможно даже проинтегрировать до конца.

Это уже отмечавшийся неоднократно в предыдущих главах случай, когда все действующие силы подчиняются одному и тому же закону Гука, т. е. когда имеем

$$F_{ij} = f_{ij} \times \Delta_{ij}, \tag{9.14}$$

где множители пропорциональности могут быть различными и вообще могут быть функциями времени.

При рассмотрении этого случая предположим для большей простоты, что центр приведения G_i тела T_i совпадает с его центром масс, а собственные оси тела T_i совпадают с главными осями инерции этого тела.

Тогда мы можем воспользоваться формулами (9.2) и соотношениями, выражающими свойства осей инерции:

$$\int\limits_{(T_i)} \eta_i'\zeta_i'\, dm_i = \int\limits_{(T_i)} \zeta_i'\xi_i'\, dm_i = \int\limits_{(T_i)} \xi_i'\eta_i'\, dm_i = 0.$$

Теперь формулы (9.3), как легко видеть, дают

$$\Xi_{ij} = f_{ij}(\xi_j - \xi_i)\, m_i m_j, \quad \mathrm{H}_{ij} = f_{ij}(\eta_j - \eta_i)\, m_i m_j,$$

$$\mathrm{Z}_{ij} = f_{ij}(\zeta_j - \zeta_i)\, m_i m_j,$$

а из формул (9.4) при помощи свойств центра масс и главных осей инерции получим

$$L_{ij}=0, \quad M_{ij}=0, \quad N_{ij}=0.$$

Поэтому уравнения движения напишутся в этом случае в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_i &= \sum_{i<j} f_{ij}m_im_j(\xi_j-\xi_i), \\ \ddot{\eta}_i &= \sum_{i<j} f_{ij}m_im_j(\eta_j-\eta_i), \\ \ddot{\zeta}_i &= \sum_{i<j} f_{ij}m_im_j(\zeta_j-\zeta_i), \end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot{p}_i-(B_i-C_i)q_ir_i &= 0, \\ B_i\dot{q}_i-(C_i-A_i)r_ip_i &= 0, \\ C_i\dot{r}_i-(A_i-B_i)p_iq_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

Уравнения (9.15) полностью совпадают с уравнениями (8.2′), которые описывают движение системы $n+1$ материальных точек, взаимодействующих взаимно по закону Гука (8.4′). Таким образом, система $n+1$ совершенно произвольных по форме и структуре неизменяемых твердых тел, материальные частицы которых также взаимодействуют по закону Гука, движется так, как если бы масса каждого тела была сконцентрирована в его центре масс. При этом уравнения (9.15) совершенно не зависят от уравнений (9.16), т. е. поступательные и вращательные движения тел вовсе не зависят друг от друга.

Кроме того, уравнения (9.16) показывают, что каждое из тел T_i вращается независимо друг от друга по законам Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки при отсутствии внешних сил.

Таким образом, уравнения движения системы $n+1$ тел в этом случае могут быть полностью проинтегрированы и задача разрешается до конца.

Заметим еще, что силовая функция двух тел T_i и T_j в случае закона (9.14) и при указанном выборе собственных систем координат принимает, как легко проверить, вид

$$U_{ij}=\frac{1}{2}f_{ij}m_im_jR_{ij}^2,$$

где

$$R_{ij}^2=(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2$$

есть расстояние между центрами масс тел в абсолютной системе координат.

Следовательно, полная силовая функция всей системы тел, как показывает формула (9.12), также имеет простой вид

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i<j} f_{ij} m_i m_j R_{ij}^2, \tag{9.17}$$

т. е. зависит только от координат центров масс тел системы и вовсе не зависит от углов Эйлера. Отсюда опять можем получить уравнения (9.15) и (9.16), используя для этого уравнения (9.11) и формулы (9.13) и (9.13′).

Примечание. Силовая функция системы $n+1$ твердых тел, элементарные частицы которых взаимодействуют по закону Гука, имеет такой простой вид (9.17) только благодаря специальному выбору собственных систем координат. При произвольном выборе собственных систем силовая функция будет иметь более сложный вид, хотя и представится конечной формулой. Но эта формула будет содержать не только координаты центров масс G_i, но и эйлеровы углы, а поэтому уравнения движения всей системы уже не разделятся на уравнения поступательного и вращательного движения по отдельности.

§ 2. Случаи существования первых интегралов уравнений движения твердых тел

При произвольно заданных телах и законах действующих сил уравнения движения системы (9.8)—(9.10) не допускают каких-либо первых интегралов. Однако в некоторых случаях эта система уравнений, так же как и система уравнений движения системы материальных точек, может иметь первые интегралы, аналогичные классическим интегралам задачи многих тел, элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона, что было показано нами в первой нашей книге.

1. Рассмотрим сначала систему уравнений (9.8), из которых выведем три следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\xi}_i &= \sum_{i=0}^{n} \Xi_i = \Xi^*, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\eta}_i &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}_i = \mathrm{H}^*, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\zeta}_i &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Z}_i = \mathrm{Z}^*. \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

Отсюда, так же как и в § 1 главы VIII, немедленно выводим, что для существования интегралов движения центра масс необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$F_{ji} = F_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n), \tag{9.19}$$

указывающие, что в рассматриваемой системе должна выполняться третья аксиома ньютоновской механики.

Действительно, если условия (9.19) выполнены, то

$$\Xi^* \equiv 0, \quad \mathrm{H}^* \equiv 0, \quad \mathrm{Z}^* = 0$$

и из (9.18) мы имеем обычные интегралы движения центра масс

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i &= a_1, & \sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i &= a_1t + b_1,\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i &= a_2, & \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i &= a_2t + b_2,\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i &= a_3, & \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i &= a_3t + b_3,
\end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

показывающие, что центр масс всей системы конечного числа абсолютно твердых тел движется относительно абсолютных осей прямолинейно и равномерно.

Если мы обозначим, как и в § 1 главы II, абсолютные координаты центра масс всей системы тел через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, то из (9.18), при отсутствии условий (9.19), получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{d\bar{\xi}}{dt} &= a_1 + \int_{t_0}^{t} \Xi^*\,dt, & m\bar{\xi} &= a_1t + b_1 + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \Xi^*\,dt,\\
m\frac{d\bar{\eta}}{dt} &= a_2 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}^*\,dt, & m\bar{\eta} &= a_2t + b_2 + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}^*\,dt,\\
m\frac{d\bar{\zeta}}{dt} &= a_3 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{Z}^*\,dt, & m\bar{\zeta} &= a_3t + b_3 + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathrm{Z}^*\,dt,
\end{aligned}\right\} \tag{9.20$'$}$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

есть полная масса всей системы $n+1$ тел T_i, а a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — произвольные постоянные.

Из (9.20′) следует, что если координаты всех точек G_i известны, то координаты общего центра масс G всей системы тел также будут известны.

Разумеется, что при выполнении условий (9.19) соотношения (9.20′) превращаются в интегралы (9.20).

Введем теперь относительную систему координат с началом в центре масс G_0 тела T_0 и с осями, соответственно параллельными абсолютным осям. Положим

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0. \tag{9.21}$$

Тогда вместо уравнений (9.8) будем иметь следующие уравнения с неизвестными функциями (9.21):

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= X_i = \Xi_i - \frac{m_i}{m_0}\Xi_0, \\ m_i\ddot{y}_i &= Y_i = \mathrm{H}_i - \frac{m_i}{m_0}\mathrm{H}_0, \\ m_i\ddot{z}_i &= Z_i = \mathrm{Z}_i - \frac{m_i}{m_0}\mathrm{Z}_0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{9.22}$$

правые части которых содержат только относительные координаты и эйлеровы углы (уравнения (9.9), очевидно, не изменяются), так же как и производные от этих величин первого и второго порядка.

Если вообразить на мгновение, что функции (9.21) и эйлеровы углы всех $n+1$ тел определены, то нужно будет еще определить абсолютные координаты точки G_0, интегрируя уравнения

$$m_0\ddot{\xi}_0 = \Xi_0, \quad m_0\ddot{\eta}_0 = \mathrm{H}_0, \quad m_0\ddot{\zeta}_0 = \mathrm{Z}_0, \tag{9.22′}$$

в которых ξ_i, η_i, ζ_i для $i \neq 0$ заменены через относительные координаты по формулам (9.21).

Найдя из (9.22′) абсолютные координаты точки G_0, мы можем найти и абсолютные координаты всех остальных точек опять-таки по формулам (9.21).

Заметим, однако, что главным образом и в большинстве случаев бывает нужно знать только относительные движения тел, т. е. точек G_i (центров масс или центров приведения) и вращения каждого из тел относительно его точки G_i. Поэтому в этих случаях задача об определении координат точки G_0 из уравнений (9.22′) оказывается ненужной.

2. Переходим теперь к рассмотрению главного вектора момента количества движения всей системы $n+1$ тел T_i.

Обозначим через c_1, c_2, c_3 проекции этого вектора на абсолютные оси $(O\xi)$, $(O\eta)$, $(O\zeta)$, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i) + A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)}\right],\\
c_2 &= \sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\zeta}_i) + A_i p_i a_{21}^{(i)} + B_i q_i a_{22}^{(i)} + C_i r_i a_{23}^{(i)}\right].\\
c_3 &= \sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i) + A_i p_i a_{31}^{(i)} + B_i q_i a_{32}^{(i)} + C_i r_i a_{33}^{(i)}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (9.23)$$

Дифференцируя выражения (9.23) по времени t, мы найдем

$$\frac{dc_1}{dt} = \hat{c}_1, \qquad \frac{dc_2}{dt} = \hat{c}_2, \qquad \frac{dc_3}{dt} = \hat{c}_3,$$

где положено для сокращения

$$\begin{aligned}
\hat{c}_1 = \sum_{i=0}^{n}\Big[m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i - \zeta_i\ddot{\eta}_i) + A_i\dot{p}_i a_{11}^{(i)} + B_i\dot{q}_i a_{12}^{(i)} + C_i\dot{r}_i a_{13}^{(i)} &+\\
+ A_i p_i \dot{a}_{11}^{(i)} + B_i q_i \dot{a}_{12}^{(i)} + C_i r_i \dot{a}_{13}^{(i)}&\Big],\\
\hat{c}_2 = \sum_{i=0}^{n}\Big[m_i(\zeta_i\ddot{\xi}_i - \xi_i\ddot{\zeta}_i) + A_i\dot{p}_i a_{21}^{(i)} + B_i\dot{q}_i a_{22}^{(i)} + C_i\dot{r}_i a_{23}^{(i)} &+\\
+ A_i p_i \dot{a}_{21}^{(i)} + B_i q_i \dot{a}_{22}^{(i)} + C_i r_i \dot{a}_{23}^{(i)}&\Big],\\
\hat{c}_3 = \sum_{i=0}^{n}\Big[m_i(\xi_i\ddot{\eta}_i - \eta_i\ddot{\xi}_i) + A_i\dot{p}_i a_{31}^{(i)} + B_i\dot{q}_i a_{32}^{(i)} + C_i\dot{r}_i a_{33}^{(i)} &+\\
+ A_i p_i \dot{a}_{31}^{(i)} + B_i q_i \dot{a}_{32}^{(i)} + C_i r_i \dot{a}_{33}^{(i)}&\Big].
\end{aligned}$$

Заменим в этих формулах $\ddot{\xi}_i$, $\ddot{\eta}_i$, $\ddot{\zeta}_i$, $\dot{p}_i$, $\dot{q}_i$, $\dot{r}_i$ их выражениями из уравнений (9.8) и (9.9), а производные от направляющих косинусов их выражениями, которые можно взять из теории динамики твердого тела или вывести непосредственно из формул (9.6) простым дифференцированием и последующей заменой производных от эйлеровых углов их выражениями, получаемыми из кинематических уравнений Эйлера (9.10), которые, как легко видеть, дают

$$\dot{\psi}_i \sin\vartheta_i = p_i \sin\varphi_i + q_i\cos\varphi_i, \qquad \dot{\vartheta}_i = p_i\cos\varphi_i - q_i\sin\varphi_i,$$
$$\dot{\varphi}_i = r_i - \dot{\psi}_i\cos\vartheta_i.$$

Таким образом, мы имеем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{a}_{11}^{(i)} &= r_i a_{12}^{(i)} - q_i a_{13}^{(i)}, & \dot{a}_{12}^{(i)} &= p_i a_{13}^{(i)} - r_i a_{11}^{(i)}, & \dot{a}_{13}^{(i)} &= q_i a_{11}^{(i)} - p_i a_{12}^{(i)},\\
\dot{a}_{21}^{(i)} &= r_i a_{22}^{(i)} - q_i a_{23}^{(i)}, & \dot{a}_{22}^{(i)} &= p_i a_{23}^{(i)} - r_i a_{21}^{(i)}, & \dot{a}_{23}^{(i)} &= q_i a_{21}^{(i)} - p_i a_{22}^{(i)},\\
\dot{a}_{31}^{(i)} &= r_i a_{32}^{(i)} - q_i a_{33}^{(i)}, & \dot{a}_{32}^{(i)} &= p_i a_{33}^{(i)} - r_i a_{31}^{(i)}, & \dot{a}_{33}^{(i)} &= q_i a_{31}^{(i)} - p_i a_{32}^{(i)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.23')$$

После всех указанных подстановок и необходимых упрощений мы получим следующие выражения для введенных выше величин $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$:

$$\hat{c}_1 = \sum_{i=0}^{n} [\eta_i Z_i - \zeta_i H_i + P_i a_{11}^{(i)} + Q_i a_{12}^{(i)} + R_i a_{13}^{(i)}] = \sum_{i=0}^{n} [\eta_i Z_i - \zeta_i H_i + L_i],$$

$$\hat{c}_2 = \sum_{i=0}^{n} [\zeta_i \Xi_i - \xi_i Z_i + P_i a_{21}^{(i)} + Q_i a_{22}^{(i)} + R_i a_{22}^{(i)}] = \sum_{i=0}^{n} [\zeta_i \Xi_i - \xi_i Z_i + M_i],$$

$$\hat{c}_3 = \sum_{i=0}^{n} [\xi_i H_i - \eta_i \Xi_i + P_i a_{31}^{(i)} + Q_i a_{32}^{(i)} + R_i a_{33}^{(i)}] = \sum_{i=0}^{n} [\xi_i H_i - \eta_i \Xi_i + N_i].$$

Используя теперь формулы (9.3), (9.3′), (9.4), (9.4′), мы приведем предыдущие выражения к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{c}_1 &= \sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} (F_{ij} - F_{ji}) \frac{\eta_i' \zeta_j' - \zeta_i' \eta_j'}{\Delta_{ij}} \, dm_j, \\
\hat{c}_2 &= \sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} (F_{ij} - F_{ji}) \frac{\zeta_i' \xi_j' - \xi_i' \zeta_j'}{\Delta_{ij}} \, dm_j, \\
\hat{c}_3 &= \sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} (F_{ij} - F_{ji}) \frac{\xi_i' \eta_j' - \eta_i' \xi_j'}{\Delta_{ij}} \, dm_j.
\end{aligned}\right\} \tag{9.24}$$

Из этих формул видим, что если в рассматриваемой системе выполняются условия (9.19), т. е. если имеет место третья аксиома Ньютона, то

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = 0, \quad \hat{c}_3 = 0,$$

вследствие чего проекции вектора количества движения, определяемые формулами (9.23), оказываются постоянными и равенства (9.23) являются точными интегралами, выражающими принцип сохранения момента количества движения нашей системы $n+1$ тел.

Если же условия (9.19) не выполняются, что и будет в самом общем случае, то величины c_1, c_2, c_3 не остаются постоянными и могут быть вычислены (при условии, что абсолютные движения всех тел T_i известны) по следующим формулам:

$$c_1 = c_1^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} \hat{c}_1 \, dt, \quad c_2 = c_2^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} \hat{c}_2 \, dt, \quad c_3 = c_3^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} \hat{c}_3 \, dt. \tag{9.25}$$

В этой задаче мы также можем рассмотреть плоскость Лапласа, т. е. плоскость, проходящую через центр масс G всей системы тел T_i и перпендикулярную к вектору момента количества движения.

Уравнение этой плоскости напишется, очевидно, в таком же виде, как и для системы материальных точек, т. е. в виде

$$c_1(\xi-\bar{\xi})+c_2(\eta-\bar{\eta})+c_3(\zeta-\bar{\zeta})=0. \tag{9.25'}$$

Если выполняются условия (9.19), т. е. если существуют интегралы момента количества движения (мы можем назвать их также «интегралами площадей»), то плоскость (9.25′) будет сохранять неизменную ориентацию относительно абсолютной системы координат.

3. Итак, при условии выполнимости третьей аксиомы Ньютона, уравнения поступательно-вращательного движения системы любого конечного числа неизменяемых твердых тел допускают такие же девять интегралов (шесть интегралов движения центра масс и три интеграла площадей), какие имеет и система материальных точек, находящихся под действием сил такого же характера. Мы увидим сейчас, что уравнения (9.8)—(9.10) могут допускать также и десятый интеграл — *интеграл живой силы*, если действующие между элементарными частицами тел силы, удовлетворяя условиям (9.19), обладают еще дополнительным свойством, выраженным в предыдущей главе соотношением (8.16), которое выполняется, когда каждая из функций F_{ij} подчиняется условию (4.20) главы IV.

В самом деле, обозначим буквой T кинетическую энергию поступательно-вращательного движения $n+1$ тел в абсолютных осях, т. е. положим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2)+(A_ip_i^2+B_iq_i^2+C_ir_1^2)\right]. \tag{9.26}$$

Дифференцируя равенство (9.26) по времени t, мы имеем при помощи уравнений (9.8) и (9.9)

$$\frac{dT}{dt}=W, \tag{9.26'}$$

где временно для краткости положено

$$W=\sum_{i=0}^{n}\left[\dot{\xi}_i\Xi_i+\dot{\eta}_i\mathrm{H}_i+\dot{\zeta}_i\mathrm{Z}_i+p_iP_i+q_iQ_i+r_iR_i\right]. \tag{9.27}$$

Преобразуем теперь выражение (9.27) по частям, разбивая W на две части (координатную и моментную), принимая

$$W=W_1+W_2 \tag{9.27'}$$

и заменяя составляющие сил и проекции моментов их выражениями (9.3′) и (9.7). Мы получим прежде всего

$$W_1 = \sum_{i=0}^{n} (\dot{\xi}_i \Xi_i + \dot{\eta}_i \mathrm{H}_i + \dot{\zeta}_i \mathrm{Z}_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} [(\xi_j' - \xi_i') \dot{\xi}_i + (\eta_j' - \eta_i') \dot{\eta}_i + (\zeta_j' - \zeta_i') \dot{\zeta}_i] \, dm_j.$$

Далее получаем

$$W_2 = \sum_{i=0}^{n} (p_i P_i + q_i Q_i + r_i R_i) = \sum_{i=0}^{n} [(p_i a_{11}^{(i)} + q_i a_{12}^{(i)} + r_i a_{13}^{(i)}) L_i +$$
$$+ (p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) M_i + (p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) N_i] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \{(\xi_j' - \xi_i') [(p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) (\zeta_i' - \zeta_i) -$$
$$- (p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) (\eta_i' - \eta_i)] +$$
$$+ (\eta_j' - \eta_i') [(p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) (\xi_i' - \xi_i) -$$
$$- (p_i a_{11}^{(i)} + q_i a_{12}^{(i)} + r_i a_{13}^{(i)}) (\zeta_i' - \zeta_i)] +$$
$$+ (\zeta_j' - \zeta_i') [(p_i a_{11}^{(i)} + q_i a_{12}^{(i)} + r_i a_{13}^{(i)}) (\eta_i' - \eta_i) -$$
$$- (p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) (\xi_i' - \xi_i)]\} \frac{F_{ij} \, dm_j}{\Delta_{ij}}.$$

Преобразуем каждое из выражений в квадратных скобках при помощи формул (9.5). Достаточно рассмотреть какое-нибудь из трех этих выражений. Например, имеем

$$(p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) (a_{31}^{(i)} x_i' + a_{32}^{(i)} y_i' + a_{33}^{(i)} z_i') -$$
$$- (p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) (a_{11}^{(i)} x_i' + a_{12}^{(i)} y_i' + a_{13}^{(i)} z_i') =$$
$$= x_i' (r_i a_{12}^{(i)} - q_i a_{13}^{(i)}) + y_i' (p_i a_{13}^{(i)} - r_i a_{11}^{(i)}) + z_i' (q_i a_{11}^{(i)} - p_i a_{12}^{(i)}) =$$
$$= \dot{a}_{11}^{(i)} x_i' + \dot{a}_{12}^{(i)} y_i' + \dot{a}_{13}^{(i)} z_i' = \dot{\xi}_i' - \dot{\xi}_i.$$

При выполнении последнего преобразования мы использовали свойство направляющих косинусов, которое заключается в том, что если рассматривать таблицу (9.5′) как определитель, то каждый элемент этого определителя равен своему алгебраическому дополнению. Кроме того, приняты во внимание формулы, дающие производные от направляющих косинусов. Преобразуя подобным же образом остальные две квадратные скобки в выражении для W_2, мы получим

$$W_2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}\,dm_j}{\Delta_{ij}} [(\xi'_j - \xi'_i)(\dot\xi'_i - \dot\xi_i) + \\ + (\eta'_j - \eta'_i)(\dot\eta'_i - \dot\eta_i) + (\zeta'_j - \zeta'_i)(\dot\zeta'_i - \dot\zeta_i)].$$

Складывая выражения для W_1 и W_2, мы найдем по формуле (9.27′) такое выражение:

$$W = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}\,dm_j}{\Delta_{ij}} [(\xi'_j - \xi'_i)\dot\xi'_i + (\eta'_j - \eta'_i)\dot\eta'_i + (\zeta'_j - \zeta'_i)\dot\zeta'_i],$$

которое можно переписать в следующей форме:

$$W = \sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \frac{dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}} [(\xi'_j - \xi'_i)(F_{ij}\dot\xi'_i - F_{ji}\dot\xi'_j) + \\ + (\eta'_j - \eta'_i)(F_{ij}\dot\eta'_i - F_{ji}\dot\eta'_j) + (\zeta'_j - \zeta'_i)(F_{ij}\dot\zeta'_i - F_{ji}(\dot\zeta'_j)]. \qquad (9.28)$$

В самом общем случае, когда условия (9.19) не выполняются, это выражение для W не поддается дальнейшему упрощению и не представляется в виде точной производной по t.

Допустим теперь, что условия (9.19) выполняются для каждой пары индексов i и j. Тогда формула (9.28) приводится к виду

$$W = -\sum_{i<j} \frac{F_{ij}\,dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}} [(\xi'_j - \xi'_i)(\dot\xi'_j - \dot\xi'_i) + \\ + (\eta'_j - \eta'_i)(\dot\eta'_j - \dot\eta'_i) + (\zeta'_j - \zeta'_i)(\dot\zeta'_j - \dot\zeta'_i)].$$

Но, дифференцируя по t формулу (9.1), мы имеем

$$\Delta_{ij}\dot\Delta_{ij} = (\xi'_j - \xi'_i)(\dot\xi'_j - \dot\xi'_i) + (\eta'_j - \eta'_i)(\dot\eta'_j - \dot\eta'_i) + (\zeta'_j - \zeta'_i)(\dot\zeta'_j - \dot\zeta'_i),$$

вследствие чего предыдущее выражение для W примет следующий весьма простой вид:

$$W = -\sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} F_{ij}\dot\Delta_{ij}\,dm_i\,dm_j. \qquad (9.28')$$

Если, наконец, каждая из функций F_{ij} удовлетворяет соотношению (4.20), то существует для нее такая функция Φ_{ij}, что мы будем иметь

$$-F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot\Delta_{ij}\ \ddot\Delta_{ij}) \cdot \dot\Delta_{ij} = \frac{d}{dt}\Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot\Delta_{ij}). \qquad (9.29)$$

Тогда формула (9.28′) примет вид

$$W=\frac{d}{dt}\sum_{i<j}\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)}\Phi_{ij}\,dm_i\,dm_j. \tag{9.29′}$$

Полагая теперь

$$\Phi=\sum_{i<j}\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)}\Phi_{ij}\,dm_i\,dm_j \tag{9.30}$$

и интегрируя равенство (9.26′), мы получим интеграл уравнений поступательно-вращательного движения системы $n+1$ твердых тел в виде

$$T=\Phi+h. \tag{9.31}$$

Равенство (9.31) можно назвать *интегралом живой силы* или *интегралом энергии*. Однако уравнение (9.31), вообще говоря, не выражает принцип сохранения энергии, а только дает выражение для кинетической энергии T в виде функции координат точек приведения G_i, эйлеровых углов тел T_i, первых производных от этих величин и вообще времени t, которое может входить явно.

Если, в частности, всякая функция F_{ij} зависит только от соответствующего расстояния Δ_{ij}, то простым интегрированием мы можем найти для каждой пары тел T_i и T_j соответствующую функцию сил из соотношения

$$-F_{ij}(\Delta_{ij})\,d\Delta_{ij}=dU_{ij}(\Delta_{ij}).$$

Тогда, как уже было указано выше (см. формулы (9.12′) и (9.12)), мы можем составить функцию сил

$$U=\sum_{i<j}\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)}U_{ij}\,dm_i\,dm_j$$

и интеграл (9.31) принимает типичный вид интеграла энергии

$$T=U+h. \tag{9.31′}$$

В качестве примера, где функция сил отсутствует, можно опять привести случай с законом Вебера. Тогда выражение (9.30) для функции Φ напишется в виде

$$\Phi=\sum_{i<j}f_{ij}\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)}\left(1-\frac{\dot\Delta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2}\right)\frac{dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}}, \tag{9.30″}$$

и интеграл (9.31) можно назвать только интегралом живой силы.

Примечание. Может случиться, что нам представится, так сказать, промежуточный случай, когда некоторые из функций F_{ij} удовлетворяют уравнению (4.20), а остальные не удовлетворяют такому уравнению. Тогда выражение (9.28) для функции W представится в виде суммы двух слагаемых, одно из которых будет точной производной, а другое — в виде производной не представляется. Например, можем иметь случай, когда

$$W = \frac{d}{dt} \sum_{i<j<k} \int_{(T_i)} \int_{(T_j)} \Phi_{ij}\, dm_i\, dm_j - \sum_{k<i<j} \int_{(T_i)} \int_{(T_j)} F_{ij} \dot{\Delta}_{ij}\, dm_i\, dm_j,$$

где k — некоторое целое число, меньшее n.

4. Покажем в заключение этого параграфа, что для системы конечного числа неизменяемых твердых тел можно получить уравнение такого же типа, какое мы рассматривали в § 1 главы VIII и которое широко известно в классической небесной механике под названием *уравнения Лагранжа — Якоби*. Это же название мы сохраняем и для систем материальных точек, управляемых законом, отличным от закона Ньютона, и сохраним его также и для рассматриваемого случая системы твердых тел, материальные частицы которых взаимодействуют по какому угодно закону такого же типа, которые рассматривались в этой книге в предыдущих главах.

Обращаясь теперь к уравнениям (9.8) и применяя к ним ту же процедуру, которую мы применяли к уравнениям (8.2), мы имеем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i) = \sum_{i=0}^{n} (\xi \Xi_i + \eta_i \mathrm{H}_i + \zeta_i \mathrm{Z}_i), \tag{9.32}$$

что можно написать (так же, как и в главе VIII) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum_{i=0}^{n} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \\ = \sum_{i=0}^{n} (\xi_i \Xi_i + \eta_i \mathrm{H}_i + \zeta_i \mathrm{Z}_i).$$

Положим теперь

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2, \quad J = \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2, \tag{9.33}$$

так что r_i есть радиус-вектор центра приведения G_i тела T_i в абсолютной системе координат и J есть момент инерции относительно начала O системы материальных точек G_i, в каждой из которых сосредоточена масса соответствующего тела T_i.

Затем положим

$$T_0^* = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2), \tag{9.34}$$

так что T_0^* есть кинетическая энергия системы точек G_i и, как видно из формулы (9.26), представляет собой «поступательную» часть полной кинетической энергии системы тел T_i.

Наконец, правую часть равенства (9.32) обозначим через V, т. е. положим

$$V = \sum_{i=0}^{n} (\xi_i \Xi_i + \eta_i \mathrm{H}_i + \zeta_i \mathrm{Z}_i). \tag{9.35}$$

Тогда уравнение (9.32) приведется к следующему виду:

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 4T_0^* + 2V. \tag{9.36}$$

Уравнение (9.36) может быть названо *первой формой уравнения Лагранжа — Якоби* для поступательно-вращательного движения системы неизменяемых твердых тел.

Чтобы получить вторую форму уравнения Лагранжа — Якоби, обозначим через R момент инерции системы точек G_i с массами m_i относительно общего центра масс G этой системы. Тогда, как известно,

$$J = R + m\bar{r}^2, \tag{9.37}$$

где

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2} \tag{9.38}$$

есть радиус-вектор точки G, а R определяется формулой

$$R = \frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j R_{ij}^2, \tag{9.39}$$

причем

$$R_{ij}^2 = (\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2, \tag{9.40}$$

так что $R_{ij} = \overline{G_i G_j}$ есть расстояние между центрами приведения тел T_i и T_j.

Исключая из (9.36) величину J, мы получим вторую форму уравнения Лагранжа — Якоби, в котором левая часть не зависит от выбора абсолютной системы координат:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4T_0^* + 2V - m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{9.41}$$

Правая часть уравнения (9.41) может быть несколько упрощена, если за начало координат принять точку G и допустить третью аксиому Ньютона. Тогда, будем иметь уравнение

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4T_c^* + 2V_c + h_c, \tag{9.41'}$$

где T_c^* — живая сила точек G_i относительно G, h_c — постоянная, а V_c дается формулой

$$V_c = \sum_{i<j} R_{ij}^2 \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}\, dm_i\, dm_j}{\Delta_{ij}}.$$

§ 3. Задача трех твердых тел. Частные решения

Здесь мы рассмотрим частный случай задачи многих тел, когда число тел равно трем, и покажем, что при выполнении некоторых дополнительных условий задача может допускать частные решения, аналогичные лагранжевым и эйлеровым решениям задачи трех материальных точек.

1. Итак, возвратимся к общим уравнениям (9.8)—(9.10) для случая $n = 2$ и преобразуем уравнения поступательного движения к виду (9.22), т. е. возьмем за начало координат точку G_0, оставляя направления осей неизменными и параллельными абсолютным осям первоначальной системы координат.

Уравнения движения трех тел напишем, несколько изменяя обозначения § 1, в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= X_1, & \ddot{y}_1 &= Y_1, & \ddot{z}_1 &= Z_1, \\ \ddot{x}_2 &= X_2, & \ddot{y}_2 &= Y_2, & \ddot{z}_2 &= Z_2, \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

а уравнения вращательного движения оставим в прежнем виде

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot{p}_i - (B_i - C_i)\,q_ir_i &= P_i, \\ B_i\dot{q}_i - (C_i - A_i)\,r_ip_i &= Q_i, \\ C_i\dot{r}_i - (A_i - B_i)\,p_iq_i &= R_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 0,\ 1,\ 2). \tag{9.43}$$

Условимся при этом, что за центры приведения тел взяты их центры масс, а за собственные оси каждого тела — его главные, центральные оси инерции, так что A_i, B_i, C_i — главные, центральные моменты инерции тела T_i.

По формулам § 1 этой главы мы можем представить правые части уравнений (9.42) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{m_1}(X_{10}+X_{12}) - \frac{1}{m_0}(X_{01}+X_{02}),\\
Y_1 &= \frac{1}{m_1}(Y_{10}+Y_{12}) - \frac{1}{m_0}(Y_{01}+Y_{02}),\\
Z_1 &= \frac{1}{m_1}(Z_{10}+Z_{12}) - \frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}),\\
X_2 &= \frac{1}{m_2}(X_{20}+X_{21}) - \frac{1}{m_0}(X_{01}+X_{02}),\\
Y_2 &= \frac{1}{m_2}(Y_{20}+Y_{21}) - \frac{1}{m_0}(Y_{01}+Y_{02}),\\
Z_2 &= \frac{1}{m_2}(Z_{20}+Z_{21}) - \frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}).
\end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Функции X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, входящие в формулы (9.44), определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
X_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} \cdot \widetilde{X}_{ij},\\
Y_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_i \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} \cdot \widetilde{Y}_{ij},\\
Z_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} \cdot \widetilde{Z}_{ij},
\end{aligned}\right\} \tag{9.44'}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{X}_{ij} &= x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x_j' + a_{12}^{(j)}y_j' + a_{13}^{(j)}z_j' - a_{11}^{(i)}x_i' - a_{12}^{(i)}y_i' - a_{13}^{(i)}z_i',\\
\widetilde{Y}_{ij} &= y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x_j' + a_{22}^{(j)}y_j' + a_{23}^{(j)}z_j' - a_{21}^{(i)}x_i' - a_{22}^{(i)}y_i' - a_{23}^{(i)}z_i',\\
\widetilde{Z}_{ij} &= z_j - z_i + a_{31}^{(j)}x_j' + a_{32}^{(j)}y_j' + a_{33}^{(j)}z_j' - a_{31}^{(i)}x_i' - a_{32}^{(i)}y_i' - a_{33}^{(i)}z_i'.
\end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

В этих формулах индексы i и j принимают значения 0, 1, 2 ($j \neq i$). Кроме того, нужно иметь в виду, что

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

Взаимные расстояния Δ_{ij} определяются очевидными формулами

$$\Delta_{ij}^2 = \widetilde{X}_{ij}^2 + \widetilde{Y}_{ij}^2 + \widetilde{Z}_{ij}^2, \tag{9.46}$$

откуда получаются также их производные по времени, причем при дифференцировании выражений (9.45) штрихованные координаты остаются постоянными, а производные от направляющих косинусов даются формулами (9.23′).

Примечание. В формулах (9.23′), (9.43) и им подобных величины p_i, q_i, r_i обозначают, как указывалось выше, проекции угловой скрости тела T_i на собственные оси, т. е. в рассматриваемом параграфе — на главные оси инерции тела T_i. Однако в предыдущем разделе мы обозначили буквой r_i радиус-вектор точки G_i и будем придерживаться этого же обозначения и дальше. Поэтому следует остерегаться спутать эти совершенно различные величины, для чего нужно только немного внимательности.

2. Величины P_i, Q_i, R_i в уравнениях (9.43) определяются формулами (9.7) для $i = 0, 1, 2$, а L_i, M_i, N_i соответственно формулами (9.4′) и (9.4). Имея в виду указанные формулы, мы представим правые части в (9.43) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= P_{01} + P_{02}, & Q_0 &= Q_{01} + Q_{02}, & R_0 &= R_{01} + R_{02},\\ P_1 &= P_{10} + P_{12}, & Q_1 &= Q_{10} + Q_{12}, & R_1 &= R_{10} + R_{12},\\ P_2 &= P_{20} + P_{21}, & Q_2 &= Q_{20} + Q_{21}, & R_2 &= R_{20} + R_{21}. \end{aligned}\right\} \quad (9.47)$$

Отдельные слагаемые в (9.47) даются следующими общими формулами:

$$\left.\begin{aligned} P_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} \cdot \tilde{P}_{ij},\\ Q_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} \cdot \tilde{Q}_{ij},\\ R_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} \cdot \tilde{R}_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (i,\ j = 0,\ 1,\ 2;\ j \neq i), \qquad (9.47')$$

где $\tilde{P}_{ij}$, $\tilde{Q}_{ij}$, $\tilde{R}_{ij}$ определяются следующими, довольно громоздкими, формулами:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}_{ij} = {} & (x_j - x_i + a_{11}^{(j)} x'_j + a_{12}^{(j)} y'_j + a_{13}^{(j)} z'_j)(a_{13}^{(i)} y'_i - a_{12}^{(i)} z'_i) + \\ & + (y_j - y_i + a_{21}^{(j)} x'_j + a_{22}^{(i)} y'_j + a_{23}^{(j)} z'_j)(a_{23}^{(i)} y'_i - a_{22}^{(i)} z'_i) + \\ & + (z_j - z_i + a_{31}^{(j)} x'_j + a_{32}^{(j)} y'_j + a_{33}^{(j)} z'_j)(a_{33}^{(i)} y'_i - a_{32}^{(i)} z'_i),\\ \tilde{Q}_{ij} = {} & (x_j - x_i + a_{11}^{(j)} x'_j + a_{12}^{(j)} y'_j + a_{13}^{(j)} z'_j)(a_{11}^{(i)} z'_i - a_{13}^{(i)} x'_i) + \\ & + (y_j - y_i + a_{21}^{(j)} x'_j + a_{22}^{(j)} y'_j + a_{23}^{(j)} z'_j)(a_{21}^{(i)} z'_i - a_{23}^{(i)} x'_i) + \\ & + (z_j - z_i + a_{31}^{(j)} x'_j + a_{32}^{(j)} y'_j + a_{33}^{(j)} z'_j)(a_{31}^{(i)} z'_j - a_{33}^{(i)} x'_i),\\ \tilde{R}_{ij} = {} & (x_j - x_i + a_{11}^{(j)} x'_j + a_{12}^{(j)} y'_j + a_{13}^{(j)} z'_j)(a_{12}^{(i)} x'_i - a_{11}^{(i)} y'_i) + \\ & + (y_j - y_i + a_{21}^{(j)} x'_j + a_{22}^{(j)} y'_j + a_{23}^{(j)} z'_j)(a_{22}^{(i)} x'_i - a_{21}^{(i)} y'_1) + \\ & + (z_j - z_i + a_{31}^{(j)} x'_j + a_{32}^{(j)} y'_j + a_{33}^{(j)} z'_j)(a_{32}^{(i)} x'_i - a_{31}^{(i)} y'_i). \end{aligned}\right\} \quad (9.48)$$

В этих формулах, как и в предыдущих, $i, j = 0, 1, 2, j \neq i$, и, кроме того,

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

Приведенные подробные формулы (9.44)—(9.48) дают выражения для правых частей уравнений (9.42), (9.43), которые вместе с кинематическими уравнениями Эйлера позволяют определить 15 неизвестных функций

$$\left.\begin{array}{c} x_1, \quad y_1, \quad z_1; \quad x_2, \; y_2, \; z_2; \\ \psi_0, \; \vartheta_0, \; \varphi_0; \quad \psi_1, \; \vartheta_1, \; \varphi_1; \quad \psi_2, \; \vartheta_2, \; \varphi_2, \end{array}\right\} \tag{9.49}$$

определяющих поступательные движения тел T_1 и T_2 относительно тела T_0 и вращательные движения каждого из трех тел вокруг его центра инерции.

Уравнения Эйлера уже приводились в этой книге несколько раз. Однако чтобы иметь все необходимые формулы в одном месте, мы выпишем эти уравнения еще раз ($i = 0, 1, 2$);

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \dot\psi_i \sin\varphi_i \sin\vartheta_i + \dot\vartheta_i \cos\varphi_i, \\ q_i &= \dot\psi_i \cos\varphi_i \sin\vartheta_i - \dot\vartheta_i \sin\varphi_i, \\ r_i &= \dot\psi_i \cos\vartheta_i + \varphi_i, \end{aligned}\right\} \tag{9.50}$$

откуда имеем еще

$$\left.\begin{aligned} \dot\psi_i &= (p_i \sin\varphi_i + q_i \cos\varphi_i) \csc\vartheta_i, \\ \dot\vartheta_i &= p_i \cos\varphi_i - q_i \sin\varphi_i, \\ \dot\varphi_i &= r_i - (p_i \sin\varphi_i + q_i \cos\varphi_i) \operatorname{ctg}\vartheta_i. \end{aligned}\right\} \tag{9.50$'$}$$

3. Для установления частных решений задачи трех твердых тел удобнее всего воспользоваться вместо прямоугольных координат точек G_1 и G_2 относительно точки G_0 такими же переменными Ляпунова, которые были использованы в задаче о движении трех материальных точек.

Эти переменные обозначим здесь буквами

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \gamma, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \tag{9.51}$$

где $\rho_1 = \overline{G_0G_1}$, $\rho_2 = \overline{G_0G_2}$ — расстояния точек G_1 и G_2 от точки G_0, γ — угол, образованный радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2, наконец ω_1, ω_2, ω_3 — проекции угловой скорости ω на оси неизменного направления (xyz) системы, образованной прямой $\overline{G_0G_1}$, прямой $\overline{G_0G_1'}$, перпендикулярной к $\overline{G_0G_1}$ в плоскости треугольника $(G_0G_1G_2)$, и прямой $\overline{G_0G_1''}$, перпендикулярной к этой плоскости.

Величины ρ_1, ρ_2, γ полностью определяют треугольник $(G_0G_1G_2)$, так как два других угла этого треугольника γ_1, γ_2

($\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$) и третья сторона Δ определяется такими же формулами, как и в случае точечной задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\gamma_1 = \frac{\rho_2}{\Delta}\sin\gamma, \quad \sin\gamma_2 = \frac{\rho_1}{\Delta}\sin\gamma, \\ &\Delta = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos\gamma}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9.51')$$

Ориентацию плоскости треугольника ($G_0G_1G_2$) относительно осей неизменного направления (xyz) определим так же, как и в главе VIII, следующими углами Эйлера: углом Ω, образуемым линией пересечения плоскости треугольника и плоскости (xy) с осью (G_0x); углом Φ, образуемым прямой ($\overline{G_0G_1}$) с линией узлов, и углом J, образуемым направлением $\overline{G_0G_1''}$ с осью (G_0z).

Эти три угла Эйлера связаны с ω_1, ω_2 и ω_3 теми же формулами (8.38), которые также выпишем еще раз:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sin\Phi\sin J\cdot\dot{\Omega} + \cos\Phi\cdot\dot{J}, \\ \omega_2 &= \cos\Phi\sin J\cdot\dot{\Omega} - \sin\Phi\cdot\dot{J}, \\ \omega_3 &= \cos J\cdot\dot{\Omega} + \dot{\Phi}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.52)$$

Мы введем также для симметрии и простоты проекции угловой скорости ω' системы, образованной прямой $\overline{G_0G_2}$, прямой $\overline{G_0G_2'}$, перпендикулярной к $\overline{G_0G_2}$ и лежащей в плоскости треугольника, и прямой, перпендикулярной к этой плоскости, на те же оси неизменного направления (xyz). Проекции угловой скорости ω' определятся очевидными формулами

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \sin(\Phi+\gamma)\sin J\cdot\dot{\Omega} + \cos(\Phi+\gamma)\cdot\dot{J}, \\ \omega_2' &= \cos(\Phi+\gamma)\sin J\cdot\dot{\Omega} - \sin(\Phi+\gamma)\cdot\dot{J}, \\ \omega_3' &= \cos J\cdot\dot{\Omega} + \dot{\Phi} + \dot{\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.52')$$

Обозначим теперь через a_{sk} направляющие косинусы осей, связанных с треугольником ($G_0G_1G_2$). Тогда, так же как в главе VIII, имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\rho_1, \quad x_2 = a_{11}\rho_2\cos\gamma + a_{12}\rho_2\sin\gamma \\ y_1 &= a_{21}\rho_1, \quad y_2 = a_{21}\rho_2\cos\gamma + a_{22}\rho_2\sin\gamma, \\ z_1 &= a_{31}\rho_1, \quad z_2 = a_{31}\rho_2\cos\gamma + a_{32}\rho_2\sin\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (9.53)$$

направляющие косинусы a_{sk} выражаются через углы Ω, Φ и Θ формулами, совершенно подобными формулам (9.6), и мы их заново приводить не будем.

Обозначим далее через a'_{sk} направляющие косинусы второй системы осей, связанных с треугольником. Эти величины a'_{sk}

получаются из формул для a_{sk} простой заменой угла Φ на $\Phi+\gamma$ и также могут быть выписаны по формулам (9.6).

Формулы (9.53) могут быть также написаны, как это легко видеть, также в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a'_{11}\rho_1\cos\gamma + a'_{12}\rho_1\sin\gamma, & x_2 &= a'_{11}\rho_2,\\ y_1 &= a'_{21}\rho_1\cos\gamma + a'_{22}\rho_1\sin\gamma, & y_2 &= a'_{21}\rho_2,\\ z_1 &= a'_{31}\rho_1\cos\gamma + a'_{32}\rho_1\sin\gamma, & z_2 &= a'_{31}\rho_2. \end{aligned}\right\} \tag{9.53'}$$

Преобразуя теперь уравнения (9.42) и (9.43) общей задачи трех твердых тел к переменным Ляпунова, мы можем написать эти нужные нам уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\rho_1-(\omega_2^2+\omega_3^2)\rho_1=a_{11}X_1+a_{21}Y_1+a_{31}Z_1,\\ &\frac{d}{dt}(\omega_3\rho_1^2)+\omega_1\omega_2\rho_1^2=\rho_1(a_{12}X_1+a_{22}Y_1+a_{32}Z_1),\\ &\frac{d}{dt}(\omega_2\rho_1^2)-\omega_1\omega_3\rho_1^2=-\rho_1(a_{13}X_1+a_{23}Y_1+a_{33}Z_1), \end{aligned}\right\} \tag{9.54}$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\rho_2-(\omega_2'^2+\omega_3'^2)\rho_2=a'_{11}X_2+a'_{21}Y_2+a'_{31}Z_2,\\ &\frac{d}{dt}(\omega'_3\rho_2^2)+\omega'_1\omega'_2\rho_2^2=\rho_2(a'_{12}X_2+a'_{22}Y_2+a'_{32}Z_2),\\ &\frac{d}{dt}(\omega'_2\rho_2^2)-\omega'_1\omega'_3\rho_2^2=-\rho_2(a'_{13}X_2+a'_{23}Y_2+a'_{33}Z_2), \end{aligned}\right\} \tag{9.54'}$$

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot p_i-(B_i-C_i)q_ir_i &= \sum_{j=0}^{2}{}' P_{ij},\\ B_i\dot q_i-(C_i-A_i)r_ip_i &= \sum_{j=0}^{2}{}' Q_{ij}\\ C_i\dot r_i-(A_i-B_i)p_iq_i &= \sum_{j=0}^{2}{}' R_{ij} \end{aligned}\right\}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ j\neq i), \tag{9.55}$$

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \dot\psi_i\sin\varphi_i\sin\vartheta_i+\dot\vartheta_i\cos\varphi_i,\\ q_i &= \dot\psi_i\cos\varphi_i\sin\vartheta_i-\dot\vartheta_i\sin\varphi_i,\\ r_i &= \dot\psi_i\cos\vartheta_i+\dot\varphi_i \end{aligned}\right\}\quad (i=0,\ 1,\ 2). \tag{9.55'}$$

Уравнения (9.54), (9.54′), (9.55), (9.55′) образуют совместную систему 30-го порядка с 15-ю неизвестными функциями, которые при произвольно заданных законах сил не допускают вообще никаких интегралов.

Однако если исходные уравнения (9.8)—(9.10) таковы, что для них существуют 10 интегралов, аналогичных классическим, то уравнения (9.42), (9.43), которые выводятся из исходных для

$n=2$, будут допускать четыре первых интеграла, и столько же интегралов будут допускать уравнения нашей задачи трех тел в переменных Ляпунова. Эти интегралы можно, конечно, написать, но они имеют в переменных Ляпунова довольно сложный и громоздкий вид и, кроме того, для нашей цели выявление частных решений не играет никакой роли, а поэтому мы их приводить здесь не будем.

4. Посмотрим теперь прежде всего, при каких условиях вышенаписанная система уравнений может допускать решения, которые мы назовем *плоскими решениями*.

Мы будем называть решение наших уравнений и соответствующее ему движение трех твердых тел плоским решением (плоским движением), если три центра масс G_0, G_1, G_2 всегда остаются в неизменной плоскости, проходящей, конечно, через общий центр масс G.

В задаче трех тел-точек, в которой действующие силы всегда направлены по прямым, проходящим через каждую пару точек, плоские решения всегда существуют. Действительно, если векторы начальных скоростей трех точек лежат в плоскости, образованной начальными положениями этих точек, то точки всегда будут оставаться в этой начальной плоскости, так как в этом случае не будет никаких причин, которые могли бы вывести какую-либо из трех точек из этой начальной плоскости, которая, очевидно, является плоскостью Лапласа.

Но в нашей задаче точки G_0, G_1, G_2 являются центрами масс трех твердых тел и если даже начальные скорости поступательных движений лежат в начальной плоскости, образованной начальными положениями центров масс, то мы не можем сказать, будут ли эти точки оставаться в начальной плоскости или нет.

В самом деле, вращательные движения тел ввиду взаимной связи уравнений поступательного и вращательного движений, несомненно, влияют на поступательные движения центров масс.

Поэтому если плоское движение трех тел возможно, то для этого должны выполняться какие-то условия, определяющие форму тел и их внутреннее строение.

Итак, допустим, что в начальный момент t_0 точки G_1 и G_2 лежат в плоскости (G_0xy) (что, очевидно, не нарушает общности) и что их начальные скорости также лежат в этой плоскости.

В каком случае, или в каких случаях, точки G_1 и G_2 всегда будут оставаться в плоскости (G_0xy)?

Предположим, что условия

$$z_1 = z_2 = \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \tag{9.56}$$

выполняющиеся в начальный момент t_0, будут выполняться в дальнейшем для всякого значения $t > t_0$.

Тогда для всякого t будем иметь

$$J=0, \quad \dot{J}=0,$$

а линия узлов будет, очевидно, неопределенной и, не нарушая общности, мы можем считать, что для всякого t будем иметь также

$$\Omega=0, \quad \dot{\Omega}=0.$$

Уравнения (9.52) и (9.52′) дадут в этом случае

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1=0, \quad \omega_2=0, \quad \omega_3=\omega=\dot{\Phi}, \\ &\omega_1'=0, \quad \omega_2'=0, \quad \omega_3'=\omega+\dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{9.57}$$

Следовательно, угол Φ будет долготой точки G_1 в плоскости (xG_0y), предполагаемой как плоскость движения, а долгота точки G_2 будет равна, очевидно, $v+\psi$. Поэтому направляющие косинусы a_{sk} и a'_{sk}, входящие в формулы (9.53) и (9.53′), будут иметь следующие значения:

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}=\cos v, & a_{21}=\sin v, & a_{31}=0, \\ a_{12}=-\sin v, & a_{22}=\cos v, & a_{32}=0, \\ a_{13}=0, & a_{23}=0, & a_{33}=1, \\ a'_{11}=\cos(v+\psi), & a'_{21}=\sin(v+\psi), & a'_{31}=0, \\ a'_{12}=-\sin(v+\psi), & a'_{22}=\cos(v+\psi), & a'_{32}=0, \\ a'_{13}=0, & a'_{23}=0, & a'_{33}=1. \end{array}\right\} \tag{9.57′}$$

Обращаясь к уравнениям (9.54), мы увидим, что плоское движение, если таковое допустимо, должно определяться уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\rho}_1-\dot{v}^2\rho_1=X_1\cos v+Y_1\sin v, \\ &\frac{d}{dt}\left(\dot{v}\rho_1^2\right)=\rho_1\left(-X_1\sin v+Y_1\cos v\right), \\ &0=Z_1, \\ &\ddot{\rho}_2-(\dot{v}+\dot{\psi})^2\rho_2=X_2\cos(v+\psi)+Y_2\sin(v+\psi), \\ &\frac{d}{dt}\left[(\dot{v}+\dot{\psi})\rho_2^2\right]=\rho_2\left[-X_2\sin(v+\psi)+Y_2\cos(v+\psi)\right], \\ &0=Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{9.58}$$

Следовательно, в плоском движении мы должны иметь тождественно

$$Z_1\equiv 0, \quad Z_2\equiv 0$$

или в силу формул (9.44)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{m_1}(Z_{10}+Z_{12})&\equiv\frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}),\\ \frac{1}{m_2}(Z_{20}+Z_{21})&\equiv\frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}).\end{aligned}\right\}\tag{9.59}$$

Остается установить условия, при которых равенства (9.59) могут быть выполнены в плоском движении (если таковое существует) для всякого значения t.

Формулы (9.44) и (9.44′) нам дадут при $z_1=z_2=0$

$$\left.\begin{aligned}(Z_{ij})_0&=\int\limits_{(T_i)}dm_i\int\limits_{(T_j)}dm_j\left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0\times(\tilde{Z}_{ij})_0,\\ (\tilde{Z}_{ij})_0&=a_{31}^{(j)}x_j'+a_{32}^{(j)}y_j'+a_{33}^{(j)}z_j'-a_{31}^{(i)}x_i'-a_{32}^{(i)}y_i'-a_{33}^{(i)}z_i'.\end{aligned}\right\}\tag{9.60}$$

Значок «0» в индексе указывает, что в выражении, заключенном в квадратные скобки, нужно положить также

$$\dot{z}_1=\dot{z}_2=\ddot{z}_1=\ddot{z}_2=0.$$

Предположим теперь, что каждое из трех тел T_i обладает динамической и геометрической симметрией относительно своей собственной плоскости $z_i'=0$, так что внешняя поверхность тела T_i симметрична относительно этой плоскости, и что, вдобавок, плотность каждого тела есть четная функция от z_i', т. е., что

$$\delta=\delta_i\left(x_i',\ y_i',\ z_i'^2\right)\qquad(i=0,\ 1,\ 2).$$

Установим каждое тело в начальный момент так, чтобы его плоскость симметрии совпадала с плоскостью (xG_0y). Тогда начальные значения углов нутации будут равны нулю и если мы будем иметь

$$\vartheta_0=\vartheta_1=\vartheta_2$$

также для всякого значения t, то каждое тело T_i будет вращаться вокруг оси неизменного направления, перпендикулярной к плоскости (xG_0y) и проходящей через точку G_i, которая, очевидно, будет тогда всегда находиться в этой плоскости. Но тогда мы будем иметь также для всякого значения t

$$\begin{gathered}a_{31}^{(i)}=0,\quad a_{32}^{(i)}=0,\quad a_{33}^{(i)}=1,\\ a_{13}^{(i)}=0,\quad a_{23}^{(i)}=0\qquad(i=0,\ 1,\ 2)\end{gathered}$$

и формулы (9.60) приведутся к виду

$$(Z_{ij})_0=\int\limits_{(T_i)}dm_i\int\limits_{(T_j)}dm_j\left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0(z_j'-z_i')\tag{9.60′}$$

где, вследствие (9.45) и (9.46),

$$(\Delta_{ij}^2)_0 = (x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x'_j + a_{12}^{(j)}y'_j - a_{11}^{(i)}x'_i - a_{12}^{(i)}y'_i)^2 + \\ + (y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x'_j + a_{22}^{(j)}y'_j - a_{21}^{(i)}x'_i - a_{22}^{(i)}y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2,$$

и величины $(\dot{\Delta}_{ij})_0$ и $(\ddot{\Delta}_{ij})_0$ не зависят вовсе от z'_i и z'_j.

Поэтому изменение знаков величин z'_i и z'_j не изменит значения величин $(\Delta_{ij})_0$, $(\dot{\Delta}_{ij})_0$, $(\ddot{\Delta}_{ij})_0$, а также и $(F_{ij})_0$, и, следовательно, все интегралы (9.60) будут равны нулю. А тогда равенства (9.59) будут удовлетворены и, таким образом, общие уравнения движения трех твердых тел будут допускать плоские решения, если каждое тело обладает плоскостью геометрической и динамической симметрии, проходящей через его центр масс.

В таком случае, если в начальный момент три тела расположены так, что их плоскости симметрии совпадают с плоскостью (xG_0y), то остальные начальные условия возможно назначить таким образом, что три центра масс G_0, G_1 и G_2 всегда будут оставаться в плоскости (xG_0y), а вращательное движение каждого тела сведется к вращению вокруг оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к этой неизменной плоскости, в которой происходит движение точек G_1 и G_2.

§ 4. Лагранжевы и эйлеровы решения задачи трех твердых тел

1. Напишем теперь дифференциальные уравнения плоского движения трех тел, каждое из которых имеет плоскость симметрии и расположено описанным в предыдущем параграфе образом.

Чтобы получить эти уравнения в наиболее простой форме, заметим прежде всего, что в случае совпадения плоскости симметрии каждого из тел T_i с плоскостью (xG_0y) мы можем, без нарушения общности, принять

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0,$$

вследствие чего будем иметь по формулам (9.6)

$$\begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos\varphi_i, & a_{21}^{(i)} &= \sin\varphi_i, \\ a_{12}^{(i)} &= -\sin\varphi_i, & a_{22}^{(i)} &= \cos\varphi_i \end{aligned} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2).$$

Значения остальных пяти направляющих косинусов были уже выписаны выше.

Теперь из формул (9.44), (9.44′), (9.48) находим

$$(X_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{X}_{ij})_0;$$

$$(Y_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_j \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{Y}_{ij})_0,$$

$$(\tilde{X}_{ij})_0 = x_j - x_i + x'_j \cos\varphi_j - y'_j \sin\varphi_j - x'_i \cos\varphi_i + y'_i \sin\varphi_i,$$

$$(\tilde{Y}_{ij})_0 = y_j - y_i + x'_j \sin\varphi_j + y'_j \cos\varphi_j - x'_i \sin\varphi_i - y'_i \cos\varphi_i,$$

$$(P_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{P}_{ij})_0,$$

$$(Q_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{Q}_{ij})_0,$$

$$(R_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (R_{ij})_0,$$

$$(\tilde{P}_{ij})_0 = [z'_i (x_j - x_i + x'_j \cos\varphi_j - y'_j \sin\varphi_j) \sin\varphi_i - \\ - z'_i (y_j - y_i + x'_j \sin\varphi_j + y_j \cos\varphi_j) \cos\varphi_i + z'_j y'_j],$$

$$(\tilde{Q}_{ij})_0 = [z'_i (x_j - x_i + x'_j \cos\varphi_j - y'_j \sin\varphi_j) \cos\varphi_j + \\ + z'_i (y_j - y_i + x'_j \sin\varphi_j + y'_j \cos\varphi_j) \sin\varphi_i - z'_j x'_j],$$

$$(\tilde{R}_{ij})_0 = [-(x_j - x_i + x'_j \cos\varphi_j - y'_j \sin\varphi_j)(x'_i \sin\varphi_i + y'_i \cos\varphi_i) + \\ + (y_j - y_i + x'_j \sin\varphi_j + y'_j \cos\varphi_j)(x'_i \cos\varphi_i - y'_i \sin\varphi_i)],$$

откуда вследствие допущенной симметрии тел T_i находим

$$(P_{ij})_0 = (Q_{ij})_0 = 0.$$

Заметим теперь, что так как при вычислении интегралов величины φ_0, φ_1, φ_2 остаются постоянными, играя роль параметров интегрирования, то мы можем ввести для каждого тела T_i новые собственные координаты, полагая

$$\bar{x}_i = x'_i \cos\varphi_i - y'_i \sin\varphi_i, \quad \bar{y}_i = x'_i \sin\varphi_i + y'_i \cos\varphi_i, \quad \bar{z}_i = z'_i,$$

а тогда для взаимных расстояний $(\Delta_{ij})_0$ получим следующие выражения $(i, j = 0, 1, 2)$:

$$(\Delta^2_{ij})_0 = (x_j - x_i + \bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 + (y_j - y_i + \bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z}_j - \bar{z}_i)^2$$

и выражения для $(X_{ij})_0$, $(Y_{ij})_0$, $(Z_{ij})_0$ напишутся следующим образом $(x_0 = y_0 = z_0 = 0)$:

$$\left.\begin{aligned}
(X_{ij})_0 &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (x_j - x_i + \bar{x}_j - \bar{x}_i),\\
(Y_{ij})_0 &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (y_j - y_i + \bar{y}_j - \bar{y}_i),\\
(R_{ij})_0 &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot [-(x_j - x_i + \bar{x}_j)\,\bar{y}_i + \\
&\qquad\qquad + (y_j - y_i + \bar{y}_j)\,\bar{x}_i].
\end{aligned}\right\} \quad (9.61)$$

Наконец формулы (9.53) дают

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \rho_1 \cos v, & x_2 &= \rho_2 \cos(v + \psi),\\
y_1 &= \rho_1 \sin v, & y_2 &= \rho_2 \sin(v + \psi),
\end{aligned}\right\} \quad (9.62)$$

а из уравнений (9.55) следует

$$p_i = 0, \quad q_i = 0, \quad r_i = \dot{\varphi}_i.$$

Таким образом, уравнения плоского движения приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\rho}_1 - \dot{v}^2\rho_1 &= (X_1)_0 \cos v + (Y_1)_0 \sin v,\\
\frac{d}{dt}(\dot{v}\rho_1^2) &= \rho_1 [-(X_1)_0 \sin v + (Y_2)_0 \cos v],\\
\ddot{\rho}_2 - (\dot{v} + \dot{\psi})^2 \cdot \rho_2 &= (X_2)_0 \cos(v + \psi) + (Y_2) \sin(v + \psi),\\
\frac{d}{dt}[(\dot{v} + \dot{\psi})\rho_2^2] &= \rho_2 [-(X_2)_0 \sin(v + \psi) + (Y_2)_0 \cos(v + \psi)],
\end{aligned}\right\} \quad (9.63)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_0\ddot{\varphi}_0 &= (R_{01})_0 + (R_{02})_0,\\
C_1\ddot{\varphi}_1 &= (R_{10})_0 + (R_{12})_0,\\
C_2\ddot{\varphi}_2 &= (R_{20})_0 + (R_{21})_0.
\end{aligned}\right\} \quad (9.64)$$

Эти семь уравнений второго порядка с семью неизвестными

$$\rho_1, \ \rho_2, \ \psi, \ v, \ \varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2 \qquad (9.65)$$

образуют совместную систему уравнений, определяющих движение трех тел, каждое из которых обладает плоскостной симметрией, центры масс которых всегда остаются в плоскости (xG_0y). Центры масс G_1, G_2 тел T_1 и T_2 описывают в этой плоскости вокруг начала G_0 плоские кривые, а каждое тело вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс, перпендикулярно к этой плоскости.

Угловые скорости этих вращательных движений суть

$$\dot{\varphi}_0,\ \dot{\varphi}_1,\ \dot{\varphi}_2.$$

Примечание. Уравнения (9.63) и (9.64) вообще не распадаются на две независимые системы, так как правые части уравнений (9.63) зависят также от углов φ_0, φ_1, φ_2 и их производных, а правые части уравнений (9.64) — от координат точек G_1 и G_2 и их производных. Кроме того, в самом общем случае правые части всех уравнений зависят также явно от времени t.

Заметим еще, что если действующие силы, т. е. функции F_{ij}, зависят только от Δ_{ij} и t или только от Δ_{ij}, то правые части уравнений плоского движения не будут содержать производных от координат точек G_1, G_2 и от углов φ_i тел T_i.

2. Частными случаями плоского движения, определяемого уравнениями (9.63) и (9.64), могут быть лагранжевы и эйлеровы движения, в которых точки G_0, G_1, G_2 образуют равносторонний треугольник, вращающийся вокруг G_0, или располагаются на одной прямой, также вращающейся вокруг начала G_0.

Но ясно, что для произвольно заданных тел, обладающих плоскостной симметрией, такого рода специальные движения существовать не будут, тем более при произвольно заданных законах действующих в рассматриваемой системе сил. Единственным известным исключением является случай, когда действующие силы определяются законом Гука (9.16). В этом случае уравнения поступательно-вращательного движения произвольно заданных тел (т. е. имеющих какую угодно форму и внутреннее строение) распадаются на две системы (9.15) и (9.16), не зависящие друг от друга. Система (9.15) описывает движение центров масс тел, т. е. системы материальных точек, массы которых равны соответствующим массам тел, а поэтому, как мы видели в главе VIII, для случая трех тел система (9.15) допускает и лагранжевы и эйлеровы движения. При этом каждое из трех тел вращается вокруг своего центра масс независимо от других тел, по законам Эйлера.

Если законы действующих сил отличаются от законов Гука и являются, например, законами Ньютона или законами Вебера, то для осуществления лагранжевых и эйлеровых движений эти законы, так же как и формы и структуры тел, должны удовлетворять дополнительным условиям.

Неизвестно, возможно ли получить эти условия, не делая заранее некоторые предположения.

Но рассмотрим случай, когда заранее известно, что каждое из тел T_i, кроме симметрии относительно плоскости, проходящей через его центр масс, обладает еще динамической и геометрической симметрией относительно оси, также проходящей через центр масс, перпендикулярно к плоскости симметрии тела.

Таким образом, рассмотрим случай, когда внешняя поверхность тела есть поверхность вращения вокруг указанной оси, а плотность каждого тела является некоторой функцией от расстояния текущей точки до оси вращения и квадрата расстояния до плоскости симметрии, так что ($i = 0, 1, 2$)

$$\delta_i = \delta_i\left(x_i'^2 + y_i'^2;\ z_i'^2\right) = \delta_i\left(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2;\ \bar{z}_i^2\right).$$

В этом случае любые две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через ось симметрии тела, также являются плоскостями симметрии, в силу чего все интегралы типа ($k = i,\ j$)

$$\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]\cdot \bar{x}_k,\qquad \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]\cdot \bar{y}_k$$

также равны нулю, как и интегралы, содержащие множителем величину $\bar{z}_k$, как было подробно показано несколько выше.

Следовательно, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} (R_{ij})_0 &= 0,\\ (X_{ij})_0 &= (x_j - x_i)\cdot \widehat{F}_{ij},\\ (Y_{ij})_0 &= (y_j - y_i)\cdot \widehat{F}_{ij}, \end{aligned}\right\} \tag{9.66}$$

где

$$\widehat{F}_{ij} = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0. \tag{9.67}$$

Теперь из уравнений (9.64) следует

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_i^0 = \mathrm{const},\\ &\varphi_i = \varphi_i^0 + (t - t_0)\cdot\dot{\varphi}_i^0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2), \end{aligned}\right\} \tag{9.68}$$

так что каждое тело T_i вращается равномерно вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью, не зависящей от поступательных движений тел, т. е. центров масс G_1 и G_2 в плоскости (xG_0y).

Выражения (9.67) зависят от величин ρ_1, ρ_2 и ψ, т. е. от величин, определяющих треугольник, вращающийся вокруг своей вершины G_0 с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$.

Уравнения, определяющие форму и положение этого треугольника в его плоскости (xG_0y), мы получим из уравнений (9.63) при помощи формул (9.66) и простых упрощений в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\rho}_1 - \dot{v}^2 \cdot \rho_1 = -\rho_1 \left\{ \frac{\widetilde{F}_{01}}{m_0} + \frac{\widetilde{F}_{10}}{m_1} + \frac{\widetilde{F}_{12}}{m_1} \right\} + \rho_2 \left\{ \frac{\widetilde{F}_{12}}{m_1} - \frac{\widetilde{F}_{02}}{m_0} \right\} \cos\psi, \\
&\frac{d}{dt}\left(\dot{v}\rho_1^2\right) = \rho_1\rho_2 \left\{ \frac{\widetilde{F}_{12}}{m_1} - \frac{\widetilde{F}_{02}}{m_0} \right\} \sin\psi, \\
&\ddot{\rho}_2 - \rho_2(\dot{v} + \dot{\psi})^2 = \\
&\qquad = -\rho_2 \left\{ \frac{\widetilde{F}_{02}}{m_0} + \frac{\widetilde{F}_{20}}{m_2} + \frac{\widetilde{F}_{21}}{m_2} \right\} + \rho_1 \left\{ \frac{\widetilde{F}_{21}}{m_2} - \frac{\widetilde{F}_{01}}{m_0} \right\} \cos\psi, \\
&\frac{d}{dt}\left[(\dot{v} + \dot{\psi})\rho_2^2\right] = \rho_1\rho_2 \left\{ \frac{\widetilde{F}_{01}}{m_0} - \frac{\widetilde{F}_{21}}{m_2} \right\} \sin\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{9.69}$$

Эти уравнения образуют совместную систему четырех дифференциальных уравнений второго порядка с четырьмя неизвестными функциями ρ_1, ρ_2, v, ψ и вполне аналогичны уравнениям плоского движения трех материальных точек, которые рассматривались в предыдущей главе.

Однако правые части этих уравнений выражаются через неизвестные функции и их производные гораздо более сложным образом, чем в задаче материальных точек.

Тем не менее, нетрудно обнаружить, что эти уравнения допускают частные решения такого же характера, которые были указаны в случае плоской задачи, и найти условия, при выполнении которых такие решения существуют.

В самом деле, посмотрим, при каких условиях уравнения (9.69) допускают треугольное решение, в котором

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho(t); \quad v = v(t); \quad \psi = \pm 60°. \tag{9.70}$$

Для этого правая часть первого уравнения должна совпадать при значениях (9.70) с правой частью третьего уравнения и правая часть второго — с правой частью четвертого. Для этого, как легко видеть, при значениях (9.70) должны выполняться следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{m_0}\widetilde{F}_{01} &= \frac{1}{m_2}\widetilde{F}_{21}, \\
\frac{1}{m_1}\widetilde{F}_{10} &= \frac{1}{m_2}\widetilde{F}_{20}, \\
\frac{1}{m_1}\widetilde{F}_{12} &= \frac{1}{m_0}\widetilde{F}_{02}.
\end{aligned}\right\} \tag{9.71}$$

Равенства (9.71) представляют собой необходимые и достаточные условия существования лагранжева решения в задаче трех твердых тел, обладающих плоско-осевой симметрией и вполне подобны условиям (8.45) в задаче трех материальных точек. Однако условия (8.45) налагают некоторые ограничения только на законы действующих сил, а условия (9.71) налагают ограничения также и на структурные характеристики тел.

Если условия (9.71) выполнены, то две оставшиеся неизвестными функции ρ и v определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = -\rho\left\{\frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} + \frac{\tilde{F}_{12}}{m_1} + \frac{\tilde{F}_{20}}{m_2}\right\}, \\ &\rho^2\dot{v} = c, \end{aligned}\right\} \tag{9.72}$$

где c — произвольная постоянная (постоянная площадей).

Так же как в главе VIII, мы имеем здесь два лагранжевых треугольных решения, в которых траектории точек G_1 и G_2 определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_1 = v(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \\ &\rho_2 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_2 = v + 60^\circ, \end{aligned}\right\} \tag{L_4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_1 = v(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \\ &\rho_2 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_2 = v - 60^\circ. \end{aligned}\right\} \tag{L_5}$$

Каждое из этих треугольных решений, которые мы вновь обозначили через (L_4) и (L_5), зависит от четырех произвольных постоянных и точки G_1 и G_2 описывают в каждом из этих решений подобные орбиты.

Если законы сил не зависят явно от времени, а выражение в фигурных скобках в формулах (9.72) окажется величиной положительной, то траектории в решениях (L_4) и (L_5) могут быть окружностями с центром в точке G_0. Тогда треугольник $(G_0G_1G_2)$ будет неизменным равносторонним треугольником, вращающимся с постоянной угловой скоростью вокруг вершины G_0, являющейся началом координат.

3. Перейдем к рассмотрению эйлеровых, или прямолинейных, решений. Посмотрим, при каких условиях точки G_1 и G_2 смогут всегда оставаться на одной прямой, проходящей через точку G_0 и вращающейся вокруг этой точки.

Так же как и в главе VIII, мы будем различать три эйлеровых решения, характеризуемых следующими условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\psi = 180^0, \quad \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \alpha\rho, \\ &\Delta = (1+\alpha)\rho, \quad \alpha > 0 \end{aligned}\right\} \tag{L_1}$$

(центры масс тел T_i располагаются в порядке G_2, G_0, G_1);

$$\left.\begin{aligned} &\psi = 0, \quad \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \alpha\rho, \\ &\Delta = (1-\alpha)\rho, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned}\right\} \tag{L_2}$$

(центры масс располагаются в порядке G_0, G_2, G_1);

$$\left.\begin{aligned} \psi = 0, \quad \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \alpha\rho, \\ \Lambda = (\alpha - 1)\rho, \quad \alpha > 1 \end{aligned}\right\} \qquad (L_2)$$

(центры масс располагаются в порядке G_0, G_1, G_2). Величина α есть некоторая постоянная, так что в каждом из прямолинейных решений отношения расстояний между центрами масс трех тел остаются постоянными. Функции ρ и v (v — угол, образуемый вращающейся прямой с неизменным направлением в плоскости (xG_0y)) определяются в каждом из трех решений следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\rho^2\dot{v} = c, \\ &\ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = -\rho\left[\frac{\widetilde{F}^*_{01}}{m_0} + \frac{\widetilde{F}^*_{12}}{m_1} + \frac{\widetilde{F}_{10}}{m_1} \mp \alpha\left(\frac{\widetilde{F}^*_{12}}{m_1} - \frac{\widetilde{F}^*_{02}}{m_0}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (9.73)$$

(знак «—» нужно взять для решения (L_1) и знак «+» для решений (L_2) и (L_3)).

Условия существования эйлеровых решений мы получим из уравнений (9.69), требуя, чтобы эти уравнения удовлетворялись значениями (L_1), (L_2), (L_3).

Эти условия напишутся последовательно следующим образом: для (L_1)

$$(1+\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{01}}{m_0} - \alpha(1+\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{02}}{m_0} + \alpha\frac{\widetilde{F}^*_{10}}{m_1} - \\ - \alpha\frac{\widetilde{F}^*_{20}}{m_2} + \alpha(1+\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{12}}{m_1} - (1+\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{21}}{m_2} = 0 \qquad (9.74)$$

и для (L_2) и (L_3)

$$(1-\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{01}}{m_1} + \alpha(1-\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{02}}{m_0} + \alpha\frac{\widetilde{F}^*_{20}}{m_2} - \\ - \alpha\frac{\widetilde{F}^*_{10}}{m_1} - \alpha(1-\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{12}}{m_1} - (1-\alpha)\frac{\widetilde{F}^*_{21}}{m_2} = 0, \qquad (9.75)$$

где величины $\widetilde{F}_{ij}$ определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{F}^*_{01} = \widetilde{F}_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}), \qquad \widetilde{F}^*_{10} = \widetilde{F}_{10}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}), \\ &\widetilde{F}^*_{02} = \widetilde{F}_{02}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot{\rho},\ \alpha\ddot{\rho}), \quad \widetilde{F}^*_{20} = \widetilde{F}_{20}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot{\rho},\ \alpha\ddot{\rho}), \\ &\widetilde{F}^*_{12} = \widetilde{F}_{12}(t;\ \pm(1\pm\alpha)\rho;\ \pm(1\pm\alpha)\dot{\rho};\ \pm(1\pm\alpha)\ddot{\rho}), \\ &\widetilde{F}^*_{21} = \widetilde{F}_{21}(t;\ \pm(1\pm\alpha)\rho;\ \pm(1\pm\alpha)\dot{\rho};\ \pm(1\pm\alpha)\ddot{\rho}), \end{aligned}\right\} \qquad (9.76)$$

причем для получения уравнения, определяющего (L_1), нужно в (9.76) взять знак «+» перед скобками и в скобках; для получения уравнения, определяющего (L_2) нужно взять знак «—»

перед скобками и внутри скобок. Наконец, для получения уравнения, определяющего (L_3), нужно взять знак «+» перед скобками и знак «—» внутри скобок.

Для нахождения самих прямолинейных решений вообще придется поступать следующим образом: нужно сначала найти решение уравнений (9.73), рассматривая в них α как параметр, затем подставить найденное значение ρ в уравнения (9.74) и (9.75), и если какое-либо из этих уравнений окажется содержащим только α, то определить его из полученного уравнения, а затем найденное значение α подставить в решение уравнений (9.73). Но эта процедура, очевидно, невыполнима, а поэтому найти эйлеровы решения задачи трех твердых тел удается только в некоторых простейших случаях.

Например, если законы сил не содержат явно времени, то уравнения (9.73) могут допускать решение $\rho = a = \text{const}$ и $\dot{v} = \text{const}$. Задавая для a какое-либо определенное значение, мы сможем из уравнений (9.74) и (9.75) найти соответствующее значение α. Тогда наша задача заведомо будет иметь решение, в котором точки G_1 и G_2 описывают окружности с центром в G_0 с радиусами a и αa соответственно и с постоянной угловой скоростью, равной c/a^2.

Разумеется, каждое из этих уравнений должно иметь по крайней мере один вещественный корень, больший нуля для (L_1), заключенный между нулем и единицей для (L_2) и больший единицы для (L_3).

Но в нашей задаче могут также существовать и непостоянные прямолинейные решения, в которых точки G_1 и G_2 движутся по некоторым замкнутым или незамкнутым кривым вокруг точки G_0 с постоянной секториальной скоростью. Таков будет, например, случай, аналогичный указанному в главе VIII, а именно тот случай, в котором функции будут таковы, что

$$\tilde{F}^*_{ij}(t;\ x\rho,\ x\dot{\rho},\ x\ddot{\rho}) = \Phi_{ij}(x) \cdot \Psi(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}),$$

где функция Ψ не зависит от индексов i и j.

В этом случае уравнения (9.74) и (9.75) напишутся соответственно, как легко видеть, следующим образом:

$$(1+\alpha)\frac{\Phi_{01}(1)}{m_0} - \alpha(1+\alpha)\frac{\Phi_{02}(\alpha)}{m_0} + \alpha\frac{\Phi_{10}(1)}{m_1} - \\ - \alpha\frac{\Phi_{20}(\alpha)}{m_1} + \alpha(1+\alpha)\frac{\Phi_{12}(1+\alpha)}{m_1} - (1+\alpha)\frac{\Phi_{21}(1+\alpha)}{m_1} = 0, \quad (9.74')$$

$$(1-\alpha)\frac{\Phi_{01}(1)}{m_1} + \alpha(1-\alpha)\frac{\Phi_{02}(\alpha)}{m_0} + \alpha\frac{\Phi_{20}(\alpha)}{m_2} - \alpha\frac{\Phi_{01}(1)}{m_1} - \\ - \alpha(1-\alpha)\frac{\Phi_{12}[\pm(1-\alpha)]}{m_1} - (1-\alpha)\frac{\Phi_{21}[\pm(1-\alpha)]}{m_2} = 0. \quad (9.75')$$

Каждое из этих уравнений содержит единственную неизвестную α, определив которую, мы найдем положение точки G_2 в каждом из эйлеровых решений.

4. Фактическая проверка условий существования лагранжевых и эйлеровых решений для трех тел, обладающих плоско-осевой симметрией и движения которых управляются заданными силами, представляет весьма сложную задачу, требующую вычисления многократных интегралов от громоздких функций с различными областями интегрирования.

Это может быть сделано вообще только при помощи разложений интегралов в бесконечные ряды, вследствие чего искомые условия необходимо распадутся на бесчисленное множество условий, проверка всей совокупности которых может сделаться доступной только в некоторых простых случаях.

Посмотрим, как это может быть сделано при предположении, что элементарные частицы каждой пары из трех тел взаимно притягиваются по закону Ньютона с постоянным коэффициентом пропорциональности. Тогда мы будем иметь

$$F_{ij}=\frac{f}{\Delta_{ij}^2}, \tag{9.77}$$

где f — обычная постоянная ньютоновского притяжения.

Формула (9.67) дает в этом случае

$$\widetilde{F}_{ij}=f\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)}\frac{dm_i\,dm_j}{[\Delta_{ij}^3]_0}. \tag{9.77'}$$

Для вычисления этого интеграла, в котором тела (T_i) и (T_j) предполагаются обладающими плоско-осевой симметрией, причем плоскости симметрии совпадают с плоскостью (xG_0y), можно поступить следующим образом. Обозначим, как обычно, через U_{ij} функцию сил двух указанных тел, расположенных указанным образом, т. е. положим

$$\widetilde{U}_{ij}=f\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)}\frac{dm_i\,dm_j}{[\Delta_{ij}]_0}. \tag{9.78}$$

В рассматриваемом случае, т. е. когда центры масс тел находятся в плоскости (xG_0y), взаимные расстояния определяются следующими формулами:

$$\Delta_{01}^2=\Delta_{10}^2=\rho_1^2+2\rho_1(\bar{x}_1-\bar{x}_0)\cdot\cos v_1+2\rho_1(\bar{y}_1-\bar{y}_0)\cdot\sin v_1+(\bar{z}_1-\bar{z}_0)^2,$$
$$\Delta_{02}^2=\Delta_{20}^2=\rho_2^2+2\rho_2(\bar{x}_2-\bar{x}_0)\cdot\cos v_2+2\rho_2(\bar{y}_2-\bar{y}_0)\sin v_2+(\bar{z}_2-\bar{z}_0)^2,$$
$$\Delta_{12}^2=\Delta_{21}^2=\Delta^2+2\Delta(\bar{x}_2-\bar{x}_1)(\cos v_2-\cos v_1)+$$
$$+2\Delta(\bar{y}_2-\bar{y}_1)(\sin v_2-\sin v_1)+(\bar{z}_2-\bar{z}_1)^2$$

Теперь из (9.78) мы выводим, например,

$$\frac{\partial \tilde{U}_{01}}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \tilde{U}_{10}}{\partial \rho_1} = -\int\limits_{(T_0)}\int\limits_{(T_1)} \frac{dm_0\, dm_1}{\Delta_{01}^2} \frac{\partial \Delta_{01}}{\partial \rho_1}.$$

Но

$$\Delta_{01} \frac{\partial \Delta_{01}}{\partial \rho_1} = \rho_1 + (\bar{x}_1 - \bar{x}_0)\cos v_1 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)\sin v_1,$$

откуда вследствие (9.77′) и замечая, что интегралы, содержащие множителем $\bar{x}_k$ или $\bar{y}_k$, равны нулю, мы получим

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}_{01} = \tilde{F}_{10} &= -\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \tilde{U}_{01}}{\partial \rho_1}\right)_0, \\ \tilde{F}_{02} = \tilde{F}_{20} &= -\left(\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \tilde{U}_{02}}{\partial \rho_2}\right)_0, \\ \tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{21} &= -\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \tilde{U}_{12}}{\partial \Delta}\right)_0 \end{aligned}\right\} \tag{9.79}$$

Так как в лагранжевом решении должно быть

$$\rho_1 = \rho_2 = \Delta = \rho,$$

то условия (9.71) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1}\frac{\partial U_{10}}{\partial \rho} &= \frac{1}{m_2}\frac{\partial U_{20}}{\partial \rho}, \\ \frac{1}{m_1}\frac{\partial U_{12}}{\partial \rho} &= \frac{1}{m_0}\frac{\partial U_{02}}{\partial \rho}, \\ \frac{1}{m_0}\frac{\partial U_{01}}{\partial \rho} &= \frac{1}{m_2}\frac{\partial U_{21}}{\partial \rho}, \end{aligned}\right\} \tag{9.80}$$

и наша задача приводится к проверке этих условий, т. е. к установлению формы и структуры тел, обладающих плоско-осевой симметрией, для которых условия (9.80) действительно выполняются.

Заметим прежде всего, что эти условия заведомо выполняются, если все три тела одинаковы по форме и структуре и имеют одинаковые массы.

Но условия (9.80) могут выполняться и для неодинаковых тел. Действительно, пусть каждое тело T_i есть шар, однородный или обладающий сферической структурой. Тогда, как нам известно из теории притяжения, мы имеем ($R_{ij} = \overline{G_i G_j}$)

$$U_{ij} = f\,\frac{m_i m_j}{R_{ij}},$$

и условия (9.80) выполняются, каковы бы ни были радиусы и массы трех шаров.

Если тела, не являясь шарами, обладают динамической и геометрической симметрией относительно оси и плоскости, ей перпендикулярной, то силовая функция двух таких тел при совпадении их плоскостей симметрии будет зависеть только от расстояния между их центрами масс и определится классическим разложением следующего вида:

$$U_{ij} = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{ij}^{(2n)}}{R_{ij}^{2n+1}}, \tag{9.81}$$

где $U_{ij}^{(2n)}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от формы и структуры этих двух тел.

Первые из этих коэффициентов определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &U_{ij}^{(0)} = m_i m_j, \\ &U_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} m_i (A_j - C_j) + \frac{1}{2} m_j (A_i - C_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{9.81'}$$

где A_i и C_i — главные, центральные моменты инерции тел T_i.

Остальные структурные коэффициенты выражаются через моменты инерции высших порядков. Выражения для $U_{ij}^{(4)}$ и $U_{ij}^{(6)}$ вычислены автором и приведены в его работе, напечатанной в международном журнале «Небесная механика», т. 14, 1976 г.

Теперь, как видно из (9.80), условия существования лагранжевых решений для трех тел указанного вида приводятся к бесчисленному множеству условий вида ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1} U_{10}^{(2n)} &= \frac{1}{m_2} U_{02}^{(2n)}, \\ \frac{1}{m_1} U_{12}^{(2n)} &= \frac{1}{m_0} U_{02}^{(2n)}, \\ \frac{1}{m_0} U_{01}^{(2n)} &= \frac{1}{m_2} U_{21}^{(2n)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.82}$$

Для $n = 0$ эти условия, очевидно, выполняются. Для $n = 1$ они приводятся, как нетрудно проверить, к следующему виду:

$$\frac{A_0 - C_0}{m_0} = \frac{A_1 - C_1}{m_1} = \frac{A_2 - C_2}{m_2}. \tag{9.82'}$$

Условия (9.82′) являются необходимыми условиями существования лагранжевых решений для трех тел, обладающих каждое плоско-осевой симметрией, плоскости симметрии которых совпадают.

Пусть каждое из тел T_i есть однородный эллипсоид вращения, для которого a_i — экваториальная полуось и c_i — полярная.

Тогда, как известно из теоретической механики, имеем

$$A_i = \frac{a_i^2 + c_i^2}{5} m_i, \quad C_i = \frac{2a_i^2}{5} m_i$$

и условия (9.82′) примут следующий вид:

$$a_0^2 - c_0^2 = a_1^2 - c_1^2 = a_2^2 - c_2^2. \tag{9.83}$$

Для трех эллипсоидов эти условия оказываются не только необходимыми, но и достаточными, т. е. если эти условия выполнены, то все остальные условия (9.82) для $n = 2$, $3, \ldots$ в случае трех однородных эллипсоидов будут выполнены автоматически. В самом деле, автором показано в цитированной выше работе, что структурные коэффициенты для двух однородных эллипсоидов имеют следующую форму:

$$U_{ij}^{(2n)} = m_i m_j V^{(2n)} \left(a_i^2 - c_i^2,\ a_j^2 - c_j^2\right), \tag{9.83′}$$

где $V^{(2n)}$ есть однородный многочлен степени $2n$ относительно величин $a_i^2 - c_i^2$ и $a_j^2 - c_j^2$, откуда и следует высказанное утверждение.

Таким образом, три однородных эллипсоида вращения (сжатых или вытянутых) могут быть расположены так, чтобы их центры, являющиеся одновременно центрами масс, находились в вершинах равностороннего треугольника в общей плоскости симметрии.

Тогда начальные скорости центров масс возможно назначить таким образом, что точки G_0, G_1, G_2 всегда будут образовывать равносторонний треугольник, а каждый эллипсоид будет вращаться с постоянно угловой скоростью ω_i вокруг своей полярной оси (оси симметрии). Эти угловые скорости вовсе не зависят от начальных скоростей центров масс и могут быть назначены произвольно, независимо друг от друга. В частности, какая-нибудь из этих величин ω_i (или даже все три) может быть взята равной нулю.

Траектории центров масс эллипсоидов T_1 и T_2 вокруг точки G_0 суть подобные кривые, замкнутые или незамкнутые, в зависимости от величин начальных скоростей точек G_1 и G_2. В частности, эти траектории могут оказаться окружностями с центром в точке G_0.

Начальный равносторонний треугольник может быть задан совершенно произвольно, но, разумеется, его сторона должна быть больше наибольшей из величин

$$a_0 + a_1, \quad a_0 + a_2, \quad a_1 + a_2.$$

Приведенными примерами мы здесь и ограничимся.

Примечание. Условия (9.83) были получены автором и напечатаны в 1974 г. в журнале «Небесная механика». Те же условия были получены В. Б. Видякиным совершенно другим способом в работе, опубликованной в 1972 г. в Астрономическом журнале АН СССР.

§ 5. Некоторые замечания об устойчивости лагранжевых и эйлеровых решений

Приближенным рассмотрением задачи о движении небесных тел, рассматриваемых как твердые или даже как жидкие, астрономы и математики занимались со времен Эйлера и Лагранжа.

Однако в строго математической постановке эта задача стала трактоваться только во второй половине XX в. и почти исключительно в предположении справедливости закона Ньютона.

Тем не менее, некоторые авторы (в том числе и автор этой книги) обратили свое внимание и на более общую задачу, в которой закон взаимодействия между элементарными частицами двух различных тел остается более или менее произвольным.

Таким образом, были выявлены условия, при наличии которых могут существовать частные решения задачи трех твердых тел, аналогичные классическим лагранжевым и эйлеровым решениям задачи трех материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Но задача об устойчивости этих частных решений задачи трех твердых тел стала рассматриваться только в самое последнее время и существенного развития еще не получила.

Чтобы не оставлять без внимания этот вопрос, мы решили включить в эту главу некоторые предварительные результаты об устойчивости частных решений задачи трех твердых тел, ограничиваясь случаем круговой ограниченной задачи с законом Лапласа, т. е. с законом взаимодействия, зависящим только от взаимного расстояния.

1. Рассмотрим задачу, описываемую уравнениями (9.42) и (9.43), но в предположении, что тело T_2 является пассивным, в том же смысле, как это предполагалось ранее, т. е. что элементарные частицы тела T_2 не оказывают никакого действия на элементарные частицы тел T_0 и T_1.

Такую задачу мы называем (так же как и в случае материальных точек) *ограниченной* задачей трех твердых тел.

Предполагаем, далее, что каждое из трех тел обладает плоско-осевой симметрией, что центры масс тел T_1 и T_2 всегда остаются в неизменной плоскости, проходящей через G_0 и начальные положения G_1 и G_2, и что каждое тело вращается вокруг своей оси симметрии, перпендикулярной к неизменной плоскости треугольника (xG_0y).

Такую задачу, в отличие от задачи, в которой тела T_i произвольны по форме и структуре, мы будем называть *специальной ограниченной задачей.*

Наконец, мы рассмотрим здесь только тот случай, в котором центр масс G_1 тела T_1 описывает в плоскости треугольника окружность с центром в точке G_0 и с постоянной угловой скоростью.

Такую задачу мы называем, как и в классическом случае, *круговой ограниченной задачей*, и эта задача имеет смысл, так как, по предположению, тела T_i обладают плоско-осевой симметрией и центры масс всех трех тел всегда находятся в одной плоскости.

Итак, наша специальная плоская круговая ограниченная задача трех твердых тел, расположенных указанным образом, приводится к задаче о движении пассивно-действующей точки G_2 под действием сил, зависящих только от расстояний между центрами масс тел, исходящих от неподвижной точки G_0 и от точки G_1, описывающей круговую орбиту вокруг центра G_0.

Введем, как мы это делали и в ограниченной задаче материальных точек, вращающуюся систему координат, ось абсцисс которой направлена к точке G_1, и перейдем теперь к безразмерным (или «пульсирующим») координатам Нехвила совершенно таким же преобразованием, которое мы рассматривали в главе VIII.

Тогда уравнения плоского движения в круговой ограниченной задаче, подобно тому как мы это делали в главе VIII, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} &= \nu\cdot\Xi, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} &= \nu\cdot\mathrm{H}, \end{aligned}\right\} \tag{9.84}$$

где τ в круговой задаче просто пропорциональна времени t, так что

$$\tau = \omega t, \quad \nu = \frac{1}{\omega^2}, \tag{9.84'}$$

ξ и η — отношения координат точки G_2 во вращающейся системе к радиусу a круговой орбиты точки G_1, а ω — угловая скорость кругового движения точки G_1. Наконец, правые части определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \tilde{F}\cdot\xi - \frac{\xi}{m_2}\cdot\tilde{F}_{20} + (1-\xi)\frac{\tilde{F}_{21}}{m_2} - \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0}, \\ \mathrm{H} &= \eta\left(\tilde{F} - \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{20} - \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{21}\right), \end{aligned}\right\} \tag{9.85}$$

где, как и в предыдущем параграфе,

$$\tilde{F}_{ij} = \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right] dm_i \, dm_j, \tag{9.86}$$

причем здесь мы будем рассматривать только тот случай (который мы назвали законом Лапласа), когда

$$\tilde{F}_{ij} = F_{ij}(\Delta_{ij}). \tag{9.86'}$$

Величина $\tilde{F}$, определяемая формулой

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} + \frac{\tilde{F}_{01}}{m_1} = \tilde{F}(a) = \omega^2, \tag{9.86''}$$

есть положительная постоянная.

Уравнения (9.85) имеют совершенно такой же вид, как и уравнения плоской круговой ограниченной задачи трех материальных точек, которую мы рассматривали во второй части этой книги.

Различие заключается только в том, что в классической или в обобщенной классической задаче правые части уравнений движения определялись конечными формулами и в ряде случаев могли быть выражены простыми алгебраическими функциями от координат Нехвила.

В нашем же случае координаты ξ и η входят в правые части уравнений (9.84) как параметры интегралов (9.86) и представляют собой весьма сложные функции этих параметров, зависящие от формы и структуры тел, и могут быть выражены только при помощи бесконечных рядов. Исключение, как всегда и ранее, составляет случай, когда (9.86′) есть закон Гука, но это единственный случай, который мы знаем, когда задача о движении любого числа тел всегда решается элементарным образом.

Заметим еще для большей ясности, что уравнения (9.84) совершенно не зависят от вращательных движений тел T_i, каждое из которых вращается независимо друг от друга вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью, различной, вообще говоря, для каждого из тел и определяемой только начальными условиями, касающимися углов Эйлера.

2. Как было отмечено в § 2 этой главы, законы действующих сил, определяемые формулой (9.86′), допускают функцию сил, так что, полагая ($i = 0, 1$)

$$\Phi_{2i}(\Delta_{2i}) = \int F_{2i}(\Delta_{2i})\, d\Delta_{2i} \tag{9.87}$$

и вводя функцию Φ по формуле

$$\Phi(\xi, \eta) = -\frac{1}{am_2}\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_0)}\Phi_{20}\,dm_2\,dm_0 - \frac{1}{am_2}\int\limits_{(T_2)}\int\limits_{(T_1)}\Phi_{21}\,dm_2\,dm_1, \tag{9.87'}$$

мы можем положить

$$\Omega = \nu\left\{\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)\cdot\tilde{F} - \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0}\cdot\xi + \Phi(\xi, \eta)\right\}, \tag{9.88}$$

вследствие чего уравнения движения (9.84) могут быть написаны в эквивалентной форме следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{9.89}$$

Уравнения (9.89) всегда, т. е. каковы бы ни были тела T_i, лишь бы они обладали плоско-осевой симметрией, допускают интеграл, соответствующий классическому интегралу Якоби в круговой плоской ограниченной задаче трех материальных точек. Этот интеграл, как легко можно установить, имеет вид

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = 2\Omega(\xi, \eta) + 2h, \tag{9.90}$$

где h — произвольная постоянная («постоянная Якоби»).

Интеграл Якоби (9.90) возможно использовать, так же как и в классической задаче, для качественного анализа движения, определяемого уравнениями (9.89), для чего нужно рассматривать «кривые Хилла» или кривые нулевой скорости, определяемые уравнением

$$\Omega(\xi, \eta) = -h \qquad (h < 0). \tag{9.90'}$$

Однако, так как Ω как функция координат ξ, η может быть представлена только бесконечным рядом, то это исследование, затруднительное уже в ограниченной задаче материальных точек, с законом, отличным от закона Ньютона, делается практически неосуществимым и может быть только частично проведено весьма приближенным образом, что для качественного исследования движения является почти бесполезным.

Единственно, что мы можем сделать на этом пути — это определить особые точки кривых (9.90'), т. е. точки либрации, соответствующие частным лагранжевым и эйлеровым решениям нашей задачи, и рассмотреть задачу об устойчивости этих решений в смысле Ляпунова, что и является предметом настоящего параграфа.

3. Так как тело (T_2) является в рассматриваемой задаче пассивно-действующим, то

$$F_{12}=F_{02}\equiv 0$$

для всех точек тела T_2.

Отсюда следует также, что

$$\tilde{F}_{12}=\tilde{F}_{02}=0, \tag{9.91}$$

а поэтому для того, чтобы наша задача допускала лагранжевы решения, необходимо и достаточно, чтобы из условий (9.71) выполнялись еще два первые, т. е. чтобы тела T_i и законы (9.86′) удовлетворяли условиям

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{m_0}\tilde{F}_{01}&=\frac{1}{m_2}\tilde{F}_{21},\\ \frac{1}{m_1}\tilde{F}_{10}&=\frac{1}{m_2}\tilde{F}_{20}.\end{aligned}\right\} \tag{9.92}$$

Действительно, при этих условиях и формулы (9.86′) уравнения (9.84) допускают решение, в котором три точки, G_0, G_1 и G_2, образуют постоянный равносторонний треугольник, вращающийся равномерно вокруг вершины G_0.

Чтобы упростить возможно более все последующие выкладки и формулы, мы примем сторону треугольника, т. е. радиус круговой орбиты точки G_1, за единицу расстояний и, кроме того, единицу времени выберем так, чтобы ω также равнялось единице.

Тогда постоянное лагранжево решение уравнений (9.84) определится следующими значениями координат точки G_2:

$$\xi=\xi_0=\frac{1}{2},\quad \eta=\eta_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{L}$$

Теперь заметим, что независимо от существования (или несуществования) лагранжева решения (L) уравнения (9.84) могут допускать также эйлерово решение, в котором точка G_2 будет лежать на прямой (G_0G_1), т. е. на оси абсцисс вращающейся системы координат. Положение точки (G_2) в этом решении определяется следующими координатами:

$$\xi=\xi_0,\quad \eta=\eta_0=0, \tag{E}$$

где ξ_0 — корень (вещественный, само собой разумеется) следующего уравнения:

$$\tilde{F}\cdot\xi_0-\frac{\tilde{F}_{20}}{m_2}\cdot\xi_0+(1-\xi_0)\frac{\tilde{F}_{21}}{m_2}-\frac{\tilde{F}_{01}}{m_0}=0. \tag{9.93}$$

Так же как и в общей задаче трех твердых тел, мы вообще будем иметь три эйлеровых решения, которые, как и ранее, будем обозначать символами (L_1), (L_2) и (L_3). Для решения (L_1) точка G_2 помещается на прямой (G_0G_1) слева от точки G_0 и имеет, следовательно, отрицательную абсциссу ξ_0. В решении (L_2) точка G_2 находится между точками G_0 и G_1 и для нее $0 < \xi_0 < 1$. Наконец в решении (L_3) точка G_2 находится правее точки G_1 и для нее $\xi_0 > 1$.

Пять точек (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) и (L_5) являются также особыми точками кривой Хилла (9.90′), так как частные производные Ω'_ξ и Ω'_η в каждой из этих пяти точек обращаются в нуль. Однако характер этих особых точек кривой Хилла остается, конечно, пока не выясненным, так как значения вторых частных производных нам еще не известны.

Заметим, что мы можем утверждать, что при выполнении условий (9.92) лагранжевы точки (L_4) и (L_5) заведомо существуют. Что же касается эйлеровых точек, то без исследования уравнения (9.93) мы ничего определенного утверждать не можем.

В зависимости от закона (9.86′) и формы, а также структуры плоско-осесимметричных тел T_i каждая из эйлеровых точек может существовать, но может и не существовать. Кроме того, мы не можем утверждать, что если какая-либо из трех эйлеровых точек существует, то она е д и н с т в е н н а. В самом деле, мы уже ранее, в ограниченной задаче трех точек, видели, что если все действующие силы управляются законом Гука, то любая точка бесконечной прямой, проходящей через точки G_0 и G_1, является эйлеровой точкой. Подобное положение может осуществиться и в рассматриваемой задаче.

Приведем теперь значения постоянной Якоби для каждой из пяти особых точек кривой Хилла. Мы имеем

$$h_1 = -\Omega(\xi_{01}, 0), \quad h_2 = -\Omega(\xi_{02}, 0), \quad h_3 = -\Omega(\xi_{03}, 0),$$
$$h_4 = -\Omega\left(\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad h_5 = -\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

причем ξ_{0i} обозначает абсциссу точки (L_i) $(i = 1, 2, 3)$, если, разумеется, такая точка существует.

4. Для рассмотрения вопроса об устойчивости какого-либо из пяти частных решений уравнений (9.84), в предположении, что таковое решение существует, необходимо прежде всего составить уравнения первого приближения (уравнения в вариациях), которые для плоской круговой задачи заведомо будут иметь постоянные коэффициенты.

Пусть существует частное решение

$$\xi = \xi_0 = \text{const}, \quad \eta = \eta_0 = \text{const}. \tag{9.94}$$

Положим теперь

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \tag{9.95}$$

где буквами x и y будем обозначать в этом параграфе отклонения близкого к (9.94) решения системы (9.84), или *возмущения* по терминологии Ляпунова.

Эти возмущения в силу уравнений (9.84) и при условии, что $\nu = \frac{1}{\omega^2} = 1$, определятся следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} &= X(x, y) = \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} &= Y(x, y) = \frac{\partial W}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{9.96}$$

где

$$\left.\begin{aligned} X(x, y) &= \Xi(\xi_0 + x, \eta_0 + y), \\ Y(x, y) &= \mathrm{H}(\xi_0 + x, \eta_0 + y), \end{aligned}\right\} \tag{9.96'}$$

и

$$W(x, y) = \Omega(\xi_0 + x, \eta_0 + y). \tag{9.96''}$$

Разлагая функцию $W(x, y)$ в ряд Тейлора по степеням x и y, мы будем иметь разложение, абсолютно сходящееся, по крайней мере при достаточно малых численно значениях этих величин:

$$W(x, y) = \Omega(\xi_0, \eta_0) + \Omega'_\xi(\xi_0, \eta_0)\cdot x + \Omega'_\eta(\xi_0, \eta_0)\cdot y + \widetilde{W}(x, y), \tag{9.97}$$

где $\widetilde{W}$ означает совокупность всех членов разложения функции W, порядок которых выше первого.

Мы можем представить $\widetilde{W}$ в виде

$$\widetilde{W} = \sum_{n=2}^{\infty} \widetilde{W}_n(x, y), \tag{9.97'}$$

где $\widetilde{W}_n$ есть однородный многочлен степени n величин x и y.

Теперь уравнения возмущенного (в смысле Ляпунова) движения точки G_2 вблизи одной из точек либрации (L_i) получатся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} &= p_{11}x + p_{12}y + \tilde{X}(x, y), \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} &= p_{21}x + p_{22}y + \tilde{Y}(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{9.98}$$

причем коэффициенты членов первого порядка определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{W}_2}{\partial x^2}, \\ p_{12} = p_{21} &= \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{W}_2}{\partial x\,\partial y}, \\ p_{22} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y_2}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{W}_2}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \tag{9.99}$$

и

$$\tilde{W}_2(x, y) = p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2. \tag{9.99'}$$

Уравнения (9.96) также, конечно, допускают интеграл Якоби, который имеет вид

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = 2W(x, y) + 2\tilde{h}, \tag{9.100}$$

который удобно записать в следующей форме:

$$x'^2 + y'^2 - \tilde{W}_2(x, y) = W^*(x, y) + 2\tilde{h}, \tag{9.101}$$

где

$$W^*(x, y) = \sum_{n=3}^{\infty} W_n(x, y) \tag{9.101'}$$

есть совокупность членов выше второго порядка в разложении функции W по степеням x и y.

Заметим, что

$$\Omega'_\xi(\xi_0, \eta_0) = 0, \quad \Omega'_\eta(\xi_0, \eta_0) = 0,$$

так как (9.94) есть, по предположению, частное решение уравнений (9.84) и одновременно особая точка кривой (9.90′), а постоянную Якоби можно просто присоединить к постоянной интеграла (9.90).

5. Вычисляя теперь коэффициенты линейных членов в правых частях уравнений (9.98), мы получим

$$\left.\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{1}{m_0}(\tilde{F}_{01})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0 + \frac{1}{m_1}(\tilde{F}_{10})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \\
&\qquad - \frac{\xi_0^2}{m_2}d'_{20} - \frac{(\xi_0-1)^2}{m_2}d'_{21}, \\
p_{12} &= p_{21} = -\eta_0\left[\frac{\xi_0}{m_2}d'_{20} - \frac{(1-\xi_0)}{m_2}d'_{21}\right], \\
p_{22} &= \frac{1}{m_0}(\tilde{F}_{01})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0 + \frac{1}{m_1}(\tilde{F}_{10})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \\
&\qquad - \frac{\eta_0^2}{m_2}d'_{20} - \frac{\eta_0^2}{m_2}d'_{21}.
\end{aligned}\right\} \tag{9.102}$$

Индекс «0» указывает, что функции $\tilde{F}_{ij}$ вычисляются в точке (ξ_0, η_0). При этом нужно заметить, что $\tilde{F}_{01}$ и $\tilde{F}_{10}$ не зависят от координат точки G_2 и есть (для круговой задачи) величины постоянные, так что

$$(\tilde{F}_{01})_0 \equiv \tilde{F}_{01}, \quad (\tilde{F}_{10})_0 \equiv \tilde{F}_{10}.$$

Величины d'_{20} и d'_{21} даются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} d'_{20} &= \int\limits_{(T_2)}\int\limits_{(T_0)} \left[\frac{1}{\Delta_{20}}\frac{d}{d\Delta_{20}}\left(\frac{F_{20}}{\Delta_{20}}\right)\right]_0 dm_2\, dm_0, \\ d'_{21} &= \int\limits_{(T_2)}\int\limits_{(T_1)} \left[\frac{1}{\Delta_{21}}\frac{d}{d\Delta_{21}}\left(\frac{F_{21}}{\Delta_{21}}\right)\right]_0 dm_2\, dm_1, \end{aligned}\right\} \qquad (9.102')$$

где F_{2i} определяются формулами (9.86′), а взаимные расстояния — формулами ($\rho_\perp = a = 1$)

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{20}^2 &= (-\xi + \bar{x}_0 - \bar{x}_2)^2 + (-\eta + \bar{y}_0 - \bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_0 - \bar{z}_2)^2, \\ \Delta_{21}^2 &= (1 - \xi + \bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + (-\eta + \bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (9.102'')$$

Формулы (9.102) для коэффициентов являются общими для всякой точки либрации. Но так как условия существования лагранжевых и эйлеровых решений различны, то придется выписать формулы (9.102) отдельно для каждой из двух групп решений. Для лагранжевых решений должны выполняться равенства (9.92), а поэтому для точек (L_4) и (L_5) формулы (9.102) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{1}{4m_2}\left(d'_{20} + d'_{21}\right), \\ p_{12} = p_{21} &= -\frac{(\pm\sqrt{3})}{4m_2}\left(d'_{20} - d'_{21}\right), \\ p_{22} &= -\frac{3}{4m_2}\left(d'_{20} + d'_{21}\right) = 3p_{11}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.103)$$

Знак «+» нужно взять для (L_4), а знак «—» для (L_5).

Для прямолинейных точек (L_i) $(i = 1, 2, 3)$ имеем следующие выражения для коэффициентов (9.102):

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \tilde{F} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0 - \frac{\xi_0^2}{m_2}d'_{20} - \frac{(\xi_0 - 1)^2}{m_2}d'_{21}, \\ p_{12} &= p_{21} = 0, \\ p_{22} &= \tilde{F} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0, \end{aligned}\right\} \qquad (9.104)$$

где ξ_0 есть соответствующий точке (L_i) корень уравнения (9.93).

Таким образом, мы должны иметь тождественно:

$$\left[\tilde{F} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0\right]\xi_0 = \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{01} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0, \qquad (9.104')$$

и формулы (9.101) можно несколько упростить.

6. Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости лагранжевых решений (L_4) и (L_5). Сначала попытаемся выявить случаи, в

которых вопрос об устойчивости может быть разрешен полностью.

Такие случаи действительно возможны. В самом деле, допустим, что коэффициенты квадратичной формы (9.99) таковы, что мы имеем

$$p_{11} < 0, \quad p_{22} < 0, \quad p_{12}^2 - p_{11}p_{22} < 0, \tag{9.105}$$

т. е. допустим, что форма $\widetilde{W}_2$ определенно-отрицательна.

Тогда относительно величин x, y, x', y' функция Ляпунова V, определяемая формулой

$$V(x, y, x', y') = x'^2 + y'^2 - \widetilde{W}_2 - W^*(x, y), \tag{9.106}$$

будет знакоопределенной функцией, производная которой по τ (здесь $\tau = t$) в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения (9.96), равна тождественно нулю, так как существует интеграл Якоби (9.101). Поэтому функция (9.106) удовлетворяет условиям первой теоремы второго метода Ляпунова, т. е. решение

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \xi' = 0, \quad \eta' = 0 \tag{9.107}$$

уравнений (9.84), соответствующее какой-либо из лагранжевых точек либрации, устойчиво относительно величин

$$x = \xi - \xi_0, \quad y = \eta - \eta_0, \quad x' = \xi', \quad y' = \eta', \tag{9.107'}$$

каковы бы ни были члены высших порядков в разложении функции $W^*(x, y)$, которая дается формулой (8.101).

Если неравенства (9.105) не выполняются, то вопрос об устойчивости остается открытым и точка либрации может оказаться и устойчивой и неустойчивой, но она заведомо не может быть асимптотически-устойчивой, так как правые части уравнений (9.84) не содержат ни времени, ни первых производных.

Примером, в котором обнаруживается устойчивость при помощи первой теоремы Ляпунова, может служить случай, когда законы сил таковы, что каждая из функций

$$\frac{F_{20}(\Delta_{20})}{\Delta_{20}}, \quad \frac{F_{21}(\Delta_{21})}{\Delta_{21}} \tag{9.108}$$

является монотонно-возрастающей (или даже только возрастающей) функцией от соответствующего расстояния Δ_{20}, Δ_{21}.

Действительно, в этом случае величины d'_{20} и d'_{21}, вычисляемые по формулам (9.102'), будут существенно положительны, а поэтому коэффициенты p_{11} и p_{22} окажутся отрицательными.

Вычисляя теперь дискриминант Δ формы $\widetilde{W}_2$, мы найдем

$$\widetilde{\Delta}' = p_{12}^2 - p_{11}p_{22} = -\frac{3}{8}\cdot\frac{d'_{20}}{m_2}\cdot\frac{d'_{21}}{m_2},$$

что также есть величина отрицательная. Таким образом, неравенства (9.105) все выполнены и лагранжева точка либрации в этом случае будет *устойчивой*.

В частности, каждое лагранжево решение будет устойчиво, если законы сил определяются формулами

$$F_{20} = \Delta_{20}^{k_0} \quad (k_0 > 1), \qquad F_{21} = \Delta_{21}^{k_1} \quad (k_1 > 1).$$

Если хотя бы одно из чисел k_0 и k_1 меньше или равно единице, то форма $\widetilde{W}_2$ заведомо не будет знакоопределенной отрицательной и первая теорема Ляпунова неприменима, а поэтому в этом случае вопрос об устойчивости лагранжева решения остается открытым.

Любопытно отметить, что прямолинейные точки либрации также могут оказаться устойчивыми, что тоже может быть установлено при помощи теоремы Ляпунова.

Действительно, из формул (9.104) мы получим (имея в виду, что $\bar{F} = \omega^2 = 1$ при нашем выборе единиц)

$$\left.\begin{aligned} p_{22} &= 1 - \frac{1}{m_2}(\hat{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\hat{F}_{21})_0, \\ p_{11} &= p_{22} - \frac{\xi_0^2}{m_2} d'_{20} - \frac{(\xi_0 - 1)^2}{m_2} d'_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{9.109}$$

Поэтому, если каждая из функций (9.108) является возрастающей и p_{22} отрицательна, то и p_{11} также будет отрицательна и функция

$$\widetilde{W}_2 = p_{11}x^2 + p_{22}y^2$$

будет заведомо знакоопределенной отрицательной.

Примечание. Разрешить задачу об устойчивости в отрицательном смысле, по крайней мере при помощи использования интеграла Якоби, невозможно, так как производная от функции V всегда равна нулю, а по теоремам Ляпунова эта производная должна быть знакоопределенной.

7. Если не удается решить вопрос об устойчивости точек либрации при помощи теоремы Ляпунова, то остается возможность рассмотреть эту задачу в *первом приближении*, т. е. рассмотреть уравнения (9.98), отбрасывая в них все члены выше первого порядка.

Тогда, как известно из главы II, решение задачи об устойчивости системы уравнений первого приближения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} &= p_{11}x + p_{12}y, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} &= p_{12}x + p_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{9.110}$$

(которые обладают в круговой задаче постоянными коэффициентами) приводится к рассмотрению характеристического уравнения этой системы

$$\lambda^4 - (p_{11} + p_{22} - 4)\lambda^2 - (p_{12}^2 - p_{11}p_{22}) = 0, \qquad (9.110')$$

решая которое относительно λ^2, найдем

$$\lambda^2 = \frac{p_{11} + p_{22} - 4}{2} \pm \sqrt{\frac{(p_{11} + p_{22} - 4)^2}{4} + \tilde{\Delta}}, \qquad (9.110'')$$

где $\tilde{\Delta}$, так же как и выше, есть дискриминант квадратичной формы $\mathfrak{W}_2$.

Рассматривая формулу (9.110″), легко выведем необходимые условия устойчивости нулевого решения системы (9.110) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} + p_{22} - 4 < 0, \quad \tilde{\Delta} < 0, \\ &\Delta = \frac{(p_{11} + p_{22} - 4)^2}{4} + \tilde{\Delta} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.111)$$

Действительно, при выполнении условий (9.111) оба корня квадратного (относительно λ^2) уравнения (9.110′) будут вещественны и отрицательны. Следовательно, все четыре корня уравнения четвертой степени (относительно λ) будут чисто мнимыми, попарно сопряженными.

Если же хотя бы одно из неравенств (9.111) не выполняется, то уравнение (9.110′) необходимо будет иметь корни с положительными вещественными частями, откуда следует, что нулевое решение системы (9.110) будет неустойчиво в первом приближении. Но тогда из теорем § 3 главы II следует, что и нулевое решение полной системы (9.98) также будет *неустойчиво*, каковы бы ни были члены высших порядков в разложении функции $\mathfrak{W}$.

Сомнительным остается случай, когда

$$p_{11} + p_{22} \leqslant 4, \quad \Delta = 0 \qquad (9.111')$$

и характеристическое уравнение имеет две пары одинаковых чисто мнимых корней.

В качестве примера применения неравенств (9.111) рассмотрим случай, когда каждая из функций (9.108) есть невозрастающая функция от Δ_{20} и, соответственно от Δ_{21}. Тогда каждая из величин (9.102′) есть величина заведомо отрицательная. Величина F опять равна единице, а F_{2i} имеют, допустим, положительные значения ($i = 0, 1$).

Для треугольных точек либрации, для которых коэффициенты уравнений первого приближения вычисляются по формулам

(9.103), найдем, полагая

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{d'_{20}}{m_2} + \frac{d'_{21}}{m_2} < 0, \\ q &= \frac{d'_{20}}{m_2} - \frac{d'_{21}}{m_2}, \end{aligned}\right\} \tag{9.112}$$

следующие значения для коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} = -\frac{1}{4}p > 0, \quad q_{22} = -\frac{3}{4}p > 0, \\ &p_{12} = p_{21} = \mp\frac{\sqrt{3}}{4}q, \end{aligned}\right\} \tag{9.112'}$$

причем здесь знак «—» относится к точке (L_4), а знак «+» к точке (L_5).

Из (9.112′) имеем

$$p_{11} + p_{22} = -p, \quad \Delta = p_{12}^2 - p_{11}p_{22} = \frac{3}{16}(q^2 - p^2) < 0.$$

Отсюда явствует, что второе из неравенств (9.111) в рассматриваемом случае выполняется, а поэтому необходимым условием устойчивости лагранжевых точек является выполнение неравенства

$$p - 4 < 0, \quad 4\Delta = (p-4)^2 - \frac{3}{4}(p^2 - q^2) > 0, \tag{9.113}$$

которое в нашем случае также выполняется, так как, раскрывая скобки, имеем

$$4\Delta > 0.$$

Для примера приведем результаты в простейшем случае, когда имеем

$$F_{20} = \frac{1}{\Delta_{20}^N}, \quad F_{21} = \frac{1}{\Delta_{21}^N}, \tag{9.114}$$

где $N > 0$. В частности, если действующие силы определяются законом Ньютона, то $N = 2$.

Применяя для вычисления d'_{20} и d'_{21} ряды, полученные в нашей статье «О разложении общей силовой функции» (Небесная механика, 1976) и производя некоторые простые преобразования, мы находим необходимые условия устойчивости лагранжевых точек в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &N < 3 + \Phi(N;\ \mu,\ a), \\ &\mu(1-\mu) < \frac{1}{3}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 \Psi(N;\ \mu,\ a), \end{aligned}\right\} \tag{9.115}$$

где Φ и Ψ — голоморфные функции от наибольшего из всех линейных размеров тел a, удовлетворяющие условиям $\Phi(N;\ \mu, 0) = 0$, $\Psi(N;\ \mu, 0) = 1$. Поэтому при $a = 0$ (все тела — материальные точки) условия (9.114) превращаются в условия Рауса — Ляпунова и при $N = 2$ дают известное классическое неравенство $27\mu(1-\mu) < 1$. Для случая $\mu = \frac{1}{2}$, когда треугольник $(G_0\, G_1\, G_2)$ является равнобедренным с высотой η_0 и боковой стороной, равной ρ_0 (причем $\rho_0^2 = 1 + 4\eta_0^2$), единственным условием устойчивости является неравенство

$$\rho_0^N > \frac{1}{4}(1 + N) \cdot \Psi^*,$$

где Ψ^* — функция такого же характера, как и в (9.115). При $a = 0$ и $N = 2$ последнее неравенство дает просто необходимое условие устойчивости точек (L_4') и (L_5') в виде

$$\rho_0 > \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\eta_0| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Что касается прямолинейных точек либрации, то проведенное автором исследование, законченное уже после сдачи рукописи книги в издательство, привело к следующим результатам: *каково бы ни было* $N > 0$ *в* (9.114), *система* (9.95) *всегда имеет только три эйлеровых точки либрации*: (L_1) *слева от* (G_0), (L_2) *между* (G_0) *и* (G_1) *и* (L_3) *справа от* (G_1). *Каждое из соответствующих эйлеровых решений неустойчиво полностью.*

ЛИТЕРАТУРА

А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, тт. 1 и 2, Изд-во АН СССР, 1954 и 1956.

А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. Е. А. Гребеникова, «Наука», 1965.

К. Якоби, Лекции по динамике, перев. под ред. Н. С. Кошлякова, ОНТИ, 1936.

Г. Н. Дубошин, Основы теории устойчивости движения, Изд-во МГУ, 1952.

И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.

И. В. Мещерский, Работы по механике тел переменной массы, Гостехиздат, 1949.

Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, перев. И. Г. Малкина, ОНТИ, 1937.

Г. К. Суслов, Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.

А. Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, перев. Ю. А. Рябова, «Наука», 1967.

В. Д. Мак-Миллан, Динамика твердого тела, ИЛ, 1951.

Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Основные задачи и методы, изд. 3-е, «Наука», 1975.

Георгий Николаевич Дубошин

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
Аналитические и качественные методы

М., 1978 г., 456 стр.

Редактор Г. С. Куликов
Техн. редактор И. Ш. Аксельрод
Корректоры Е. А. Белицкая, Л. С. Сомова

ИБ № 11081

Сдано в набор 15.10.77. Подписано к печати 27.03.78. Т-07115. Бумага 60×90 1/16, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 27,43 Тираж 3300 экз. Заказ № 792. Цена книги 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.